UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Teoría gauge y topología algebraica

Gauge theory and algebraic topology

TOMÁS RUIZ-ROSO SALGADO

SEPTIEMBRE 2022

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53-01, 55-01

Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología

Director: Guillermo Gallego
Tutor: Ángel González Prieto

A mi padre, a mi madre y a mi hermano, por el apoyo constante durante estos años.
A todas esas personas que formaron parte del camino,
desde el primer grupito de básicas hasta el equipo de baloncesto.
Y a Rober, que de no haber sido por esa conversación durante el verano de 2017,
ahora mismo no estaría aquí.

Resumen

Este trabajo es una introducción a la teoría de conexiones en fibrados principales, conocida habitualmente como *teoría gauge*. En particular, el objetivo principal del trabajo es la demostración de la correspondencia entre fibrados planos sobre una variedad diferenciable y las representaciones del grupo fundamental de dicha variedad en el grupo de estructura de los fibrados. Este resultado muestra una profunda relación entre un invariante diferenciable de la variedad, como es el espacio de móduli de fibrados planos, y un invariante topológico, su variedad de caracteres.

Palabras clave: *Fibrado, fibrado principal, conexión, curvatura, distribución integrable, espacio recubridor, monodromía, holonomía.*

Abstract

This document is an introduction to the theory of connections on principal bundles, also known as *gauge theory*. In particular, the main goal of the text is the proof of the correspondence between flat bundles over a smooth manifold and the representations of the fundamental group of the manifold into the structure group of the bundles. This result shows a deep relation between a smooth invariant of the manifold, the moduli space of flat bundles, and a topological invariant, its character variety.

Keywords: *Fibre bundle, principal bundle, connection, curvature, integrable distribution, covering space, monodromy, holonomy.*

Índice

Introducción

La teoría de *fibrados* aparece de forma muy natural en geometría diferencial, por ejemplo, al considerar objetos que inmediatamente vemos necesario asociar a una variedad diferenciable, como puede ser el fibrado tangente. Para dar una buena noción de lo que significa derivar una sección a lo largo de un fibrado, aparecen las *conexiones*. Todos los fibrados llevan asociado un determinado *grupo de estructura*, lo que lleva de forma bastante directa al concepto de *fibrado principal*. La teoría de conexiones puede generalizarse también a este contexto, dando lugar a la teoría de *conexiones principales*.

A toda conexión principal se le puede asignar una forma diferencial llamada la *curvatura*. Si se entienden las conexiones como distribuciones ≪horizontales≫, la curvatura mide lo que dista una conexión de ser una distribución *integrable*. Resultan entonces de particular interés aquellas conexiones para las cuales la curvatura es nula. Éstas son las *conexiones planas*.

Utilizando el *teorema de Frobenius* es posible hallar *variedades integrales maximales* asociadas a una distribución integrable y, por tanto, en particular, a una conexión plana. Es fácil demostrar que la distribución integrable asociada a una conexión plana A en un fibrado principal define un espacio recubridor sobre la base del mismo. A dicho espacio recubridor se le puede asignar un homomorfismo de *monodromía*, que da una representación del grupo fundamental de la base en el grupo de estructura del fibrado principal. Esta representación se denomina el homomorfismo de *holonomía* de la conexión A. Se demuestra entonces que esta asignación define una correspondencia biyectiva entre el denominado *espacio de móduli de fibrados planos* (los fibrados planos identificados por *equivalencia gauge*) y la llamada *variedad de caracteres* (las representaciones del grupo fundamental en el grupo de estructura salvo automorfismo interno). Estos objetos son de gran interés en la matemática moderna y se encuentran en el centro de múltiples correspondencias entre distintas ramas de las matemáticas como son la teoría gauge, la topología algebraica, la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y la geometría algebraica.

El objetivo de este trabajo es enunciar y demostrar la correspondencia ya enunciada entre conexiones planas y representaciones del grupo fundamental. Para ello introducimos las nociones básicas sobre fibrados en general y sobre fibrados principales en particular, conexiones y curvatura. También estudiamos detalladamente la teoría de espacios recubridores *regulares* o *de Galois* y la clasificación de los espacios G-espacios recubridores, mediante la introducción de la *acción de monodromía*.

En la Sección 1 repasamos algunos conceptos básicos sobre acciones de grupos en general, y de grupos de Lie en particular. Concretamente, introducimos las nociones de *órbita* y *estabilizador*, describimos varios tipos de acción en función de sus propiedades y, en el contexto de los grupos de Lie, introducimos las nociones de *campo vectorial fundamental* y la *forma de Maurer-Cartan*.

La Sección 2 es un repaso de nociones elementales de topología algebraica, como las relaciones básicas entre el grupo fundamental y los espacios recubridores. En la Sección 3 se desarrolla más esta relación, introduciendo la *acción de monodromía*, el *grupo de Galois* de un espacio recubridor y la teoría de *G-recubridores*.

La Sección 4 es el núcleo del trabajo, siendo así la sección más larga y también la más importante. En esta sección se introduce toda la teoría de fibrados y de fibrados principales y todo lo relacionado con *conexiones*, *curvatura* y *transformaciones gauge*.

Finalmente, la Sección 5 contiene el enunciado y la demostración de la correspondencia fundamental de este trabajo.

Las Secciones 1 y 2 se consideran ≪repaso≫ de los contenidos del grado y por tanto en las mismas se ha decidido omitir la mayoría de las demostraciones. La Sección 3 ha seguido los libros de Fulton [3] y Lee [6]. Para la Sección 4 las referencias principales han sido el libro de Hamilton [4] y el libro de Morita [9], complementado con las notas de Figueroa-O'Farrill [2] y el libro de Kobayashi-Nomizu [5]. La demostración del teorema de la Sección 5 se ha tomado a grandes rasgos del libro de Morita [8].

1 Acción de un grupo

1.1 Definición y propiedades

Definición 1.1. Sea G un grupo y M un conjunto. Una aplicación

$$\begin{aligned} M \times G &\longrightarrow M \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g \end{aligned}$$

tal que:

1) $p \cdot 1_G = p$ para todo $p \in M$,

2) $p \cdot (gh) = (p \cdot g) \cdot h$ para todo $g, h \in G$, $p \in M$,

se dice que es una **acción por la derecha** de G sobre M.

Una **acción por la izquierda** se define de manera análoga como una aplicación

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

que cumple:

1) $1_G \cdot p = p$ para todo $p \in M$,

2) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para todo $g, h \in G$, $p \in M$.

Podemos pensar la acción del grupo G sobre M como mover un punto $p \in M$ sobre M según varía el elemento $g \in G$.

Si G es un grupo topológico, M un espacio topológico y la aplicación en cuestión es continua, entonces se dice que es una ***acción continua***. De igual manera, si G es un grupo de Lie, M una variedad diferenciable y la aplicación es diferenciable, entonces se dice que es una **acción diferenciable**.

Proposición 1.2. *Dada una acción $M \times G \to M$; $(p, g) \mapsto p \cdot g$ por la derecha de un grupo G sobre un conjunto M. Entonces la acción $G \times M \to M$ dada por $(g, p) \mapsto g \cdot p = p \cdot g^{-1}$ define una acción por la izquierda de G sobre M.*

Fijado un elemento $g \in G$ se definen la **traslación por la derecha** como la aplicación

$$\begin{aligned} R_g : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto R_g(p) = p \cdot g \end{aligned}$$

y la **traslación por la izquierda** como la aplicación

$$\begin{aligned} L_g : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto L_g(p) = g \cdot p. \end{aligned}$$

Claramente, para el caso de acciones continuas o diferenciables se tiene que tanto la traslación por la derecha como por la izquierda son funciones continuas o diferenciables respectivamente.

Todas las traslaciones, definen biyecciones de M para cualquier $g \in G$ y las aplicaciones $R_G : G \to \mathrm{Biy}(M)$; $g \mapsto R_g$ y $L_G : G \to \mathrm{Biy}(M)$; $g \mapsto L_g$ son homomorfismos de grupos. Para acciones continuas o diferenciables se tienen los homomorfismos de grupos $G \to \mathrm{Homeo}(M)$ o $G \to \mathrm{Diff}(M)$ respectivamente.

Las siguientes definiciones las vamos a dar en términos de una acción por la derecha $M \times G \to M$; $(p, g) \mapsto p \cdot g$, aunque para acciones por la izquierda son análogas.

Definición 1.3. Se define la **órbita** de un punto $p \in M$ bajo la acción de G como el conjunto

$$\mathcal{O}_G(p) := \{p \cdot g : g \in G\}.$$

Definición 1.4. Se define el **estabilizador** de un punto $p \in M$ bajo la acción de G como el conjunto

$$\mathrm{Stab}_G(p) := \{g \in G : p \cdot g = p\}.$$

Es un subgrupo de G.

La relación dada por

$$p \sim q \text{ si y solo si } q = p \cdot g \text{ para algún } g \in G$$

para $p, q \in M$ es una relación de equivalencia. La órbita de cada punto $p \in M$ es precisamente la clase equivalencia de dicho punto, es decir, $\mathcal{O}_G(p) = [p]$.

Definición 1.5. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto M, se define el **espacio de órbitas** de la acción como el conjunto

$$M/G := \{\mathcal{O}_G(p) \subset M : p \in M\}.$$

Al conjunto M/G también se le conoce como **espacio cociente** de M por la acción de G.

La aplicación $\pi : M \to M/G$ definida por $p \mapsto \pi(p) = [p]$ se conoce como **proyección**. Se dice que un punto $p \in M$ es un **representante** de $x \in M/G$ si $[p] = x$.

Definición 1.6. Una acción de G sobre M es **transitiva** si para cualesquiera $p, q \in M$ con $p \neq q$ existe un elemento $g \in G$ tal que $p = q \cdot g$. En este caso, se dice que M es un **espacio homogéneo** de G.

Definición 1.7. Una acción de G sobre M es **libre** si para todo $p \in M$ tal que $p \cdot g = p$ entonces $g = 1_G$.

Si la acción de G es a la vez libre y transitiva, entonces se dice que G actúa de forma **simplemente transitiva** sobre M.

Definición 1.8. Sean $\cdot_1 : M \times G \to M$ y $\cdot_2 : N \times G' \to N$ dos acciones por la derecha de dos grupos diferentes G y G' sobre dos conjuntos diferentes M y N respectivamente y sea $\rho : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces se dice que la aplicación $f : M \to N$ es **ρ-equivariante** si

$$f(p \cdot_1 g) = f(p) \cdot_2 \rho(g)$$

para todo $p \in M$, $g \in G$.

Si G actúa sobre M y N y $f(p \cdot_1 g) = f(p) \cdot_2 g$ entonces diremos que $f : M \to N$ es una aplicación **G-equivariante**.

En el caso de acciones continuas o diferenciables la aplicación f tiene que ser continua o diferenciable respectivamente. Si f es biyectiva, entonces diremos que es un **isomorfismo** de acciones de G.

1.2 Campos vectoriales fundamentales

Sea G un grupo de Lie y consideremos acciones diferenciables por la derecha y por la izquierda. Como vimos en la sección anterior, las traslaciones por la derecha $R_g : G \to G$; $h \mapsto R_g(h) = h \cdot g = hg$ y por la izquierda $L_g : G \to G$; $h \mapsto L_g(h) = g \cdot h = gh$ son difeomorfismos.

Definición 1.9. Un campo vectorial $v \in \mathfrak{X}(G)$ es **invariante por la izquierda** si para todo elemento $g \in G$ se tiene que $L_{g*}(v) = v$.

Los campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie están completamente determinados por sus valores en un solo punto de G, por lo tanto, a cada vector $v_{1_G} \in T_{1_G}G$ le podemos asociar un campo vectorial v invariante por la izquierda definido por $v_g = L_{g*}(v_{1_G})$. Teniendo en cuenta que el corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes por la izquierda es también un campo invariante por la izquierda, $T_{1_G}G$ con la operación $[,]$ tiene estructura de álgebra. Al par $(T_{1_G}G, [,])$ que denotaremos por $\mathfrak{g}$ se le conoce como **álgebra de Lie** de G.

Definición 1.10. Se define la **forma de Maurer-Cartan** como la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada θ en G, $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$, definida por

$$\theta_g = (L_{g^{-1}*})_g : T_gG \to T_{1_G}G \cong \mathfrak{g}.$$

La forma de Maurer-Cartan asocia a cada vector tangente $v_g \in T_gG$ el único campo vectorial invariante por la izquierda cuyo valor en g sea v_g.

Para todo $g \in G$ se define la aplicación

$$\begin{aligned} L_g \circ R_{g^{-1}} = \mathrm{Ad}_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto \mathrm{Ad}_g(h) = ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Esta aplicación preserva la identidad, es decir, $\mathrm{Ad}_g(1_G) = g1_Gg^{-1} = 1_G$, por lo tanto, su derivada $\mathrm{Ad}_{g\,*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ define una representación de G sobre su álgebra de Lie. Esta representación viene dada por la aplicación $\mathrm{ad}_g := \mathrm{Ad}_{g\,*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida como

$$\mathrm{ad}_g(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(g\exp(tv)g^{-1})$$

y se la conoce como **representación adjunta**.

Proposición 1.11 (Invariancia de la forma de Maurer-Cartan)**.** *Sea G un grupo de Lie y sea $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ la forma de Maurer-Cartan. Entonces se tiene:*

$$\begin{aligned} L_g^*\theta &= \theta \\ R_g^*\theta &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ\theta \end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

Definición 1.12. Dada una acción por la derecha de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M. Para un $v \in \mathfrak{g}$ se define su **campo vectorial fundamental** $\sigma(v)$ para todo $p \in M$ como

$$\sigma_p(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \exp(tv)).$$

En el caso en el que el grupo G actuara por la izquierda, el campo vectorial fundamental de $v \in \mathfrak{g}$ viene dado por

$$\sigma_p(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(-tv) \cdot p)$$

para todo $p \in M$.

A lo largo del texto también usaremos $\widetilde{v}$ para denotar el campo vectorial fundamental de un campo v.

Teniendo en cuenta que los campos $v \in \mathfrak{g}$ definen subgrupos uniparamétricos dados por $\exp(tv)$ para $t \in \mathbb{R}$, la acción de dicho subgrupo sobre un punto $p \in M$ define una curva en M y el campo vectorial fundamental en p es el vector velocidad de dicha curva en $t = 0$.

Proposición 1.13. *Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable M y sea $v \in \mathfrak{g}$:*

1. *Si G actúa por la derecha, entonces $R_{g*}(\sigma(v)) = \sigma(\mathrm{ad}_{g^{-1}} v)$.*

2. Si G actúa por la izquierda, entonces $L_{g*}(\sigma(v)) = \sigma(\mathrm{ad}_g v)$.

Demostración. Solo vamos a probar el caso para la acción por la derecha, pues para la acción por la izquierda es de manera similar. Por definición, para un $p \in M$,

$$R_{g*}(\sigma_p(v)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} R_g(p \cdot \exp(tv)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}((p \cdot \exp(tv)) \cdot g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot gg^{-1} \exp(tv)g)$$
$$= \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \exp(tv)g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot g \exp(t\,\mathrm{ad}_{g^{-1}} v)) = \sigma_{p \cdot g}(\mathrm{ad}_{g^{-1}} v).$$

Por lo tanto, se tiene que $R_{g*}(\sigma(v)) = \sigma(\mathrm{ad}_{g^{-1}} v)$. □

2 Espacios recubridores

2.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1. Sean Y y X dos espacios topológicos y sea $p : Y \to X$ una aplicación continua. Un subconjunto abierto $N \subseteq X$ se dice que está **regularmente cubierto** por p si $p^{-1}(N)$ puede escribirse como una unión disjunta de subconjuntos abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de Y tales que $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to N$ es un homeomorfismo para cada α.

Definición 2.2. Sean Y y X dos espacios topológicos con Y conexo y localmente conexo por caminos. Sea $p : Y \to X$ una aplicación continua y sobreyectiva. Se dice que $p : Y \to X$es una **aplicación recubridora** si todo punto de X tiene un entorno regularmente cubierto por p. En este caso se dice que Y es un **espacio recubridor** de X y X es la **base del recubridor**.

A lo largo del texto utilizaremos los términos *aplicación recubridora* y *recubridor* de igual manera para referirnos a la estructura $p : Y \to X$ completa.

Observación 2.3. Si $p : Y \to X$ es una aplicación recubridora, entonces para cada $x \in X$ el subespacio $p^{-1}(x) \subset Y$ tiene la topología discreta ya que cada $V_\alpha \subset Y$ es abierto e interseca con $p^{-1}(x)$ en un solo punto, por lo tanto este punto es abierto en $p^{-1}(x)$.

Algunos autores dan una definición de espacios recubridores más general, omitiendo la condición de que Y sea localmente conexo por caminos, o incluso que Y sea conexo. Suponiendo que Y es conexo y localmente conexo por caminos tenemos que realmente Y es conexo por caminos. Además, el hecho de que p sea sobreyectiva implica que X es también conexo por caminos y por ser una aplicación cociente y abierta, X es localmente conexo por caminos.

Ejemplo 2.4. La aplicación $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ es una aplicación recubridora. En efecto, si consideramos el subconjunto

$$X_+ = \{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) : \cos(2\pi x) > 0, x \in \mathbb{R}\}$$

de los puntos de $\mathbb{S}^1$ con la primera coordenada positiva, vemos que

$$p^{-1}(X_+) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(2\pi x) > 0\},$$

es decir,

$$p^{-1}(X_+) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n,$$

donde $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$. Además, es claro que la restricción de p sobre cualquier intervalo V_n, por las propiedades de las funciones seno y coseno, es una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua, y por lo tanto es un homeomorfismo entre V_n y X_+.

Aplicando el mismo razonamiento para los subconjuntos

$$\begin{aligned}
X_- &= \{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) : \cos(2\pi x) < 0, x \in \mathbb{R}\}\\
Y_+ &= \{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) : \sin(2\pi x) > 0, x \in \mathbb{R}\}\\
Y_- &= \{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) : \sin(2\pi x) < 0, x \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

tenemos que estos subconjuntos abiertos de $\mathbb{S}^1$ recubren enteramente $\mathbb{S}^1$ y cada uno de ellos está regularmente cubierto por p.

Ejemplo 2.5. Considerando $\mathbb{S}^1$ como el subconjunto de números complejos de módulo 1, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, la aplicación $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $p_n(z) = z^n$ es una aplicación recubridora. En efecto, si para cualquier $z_0 \in \mathbb{S}^1$ consideramos el subconjunto $N = \mathbb{S}^1 \setminus \{z_0\}$, tenemos que

$$p_n{}^{-1}(N) = \{z \in \mathbb{S}^1 : z^n \neq -z_0\},$$

el cual tiene n componentes cada una de ellas homeomorfa a N vía p_n.

Nota 2.6. Es importante tener en cuenta que la condición de que p sea un homeomorfismo local y además sea una aplicación sobreyectiva no es suficiente para asegurar que p sea una aplicación recubridora. Por ejemplo, si consideramos $Y = (0,2) \subseteq \mathbb{R}$ y definimos $p : Y \to \mathbb{S}^1$; $y \mapsto p(y) = (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$, claramente p es un homeomorfismo local y es una aplicación sobreyectiva. Sin embargo, no es una aplicación recubridora, ya que el punto $(1,0)$ en $\mathbb{S}^1$ no tiene un entorno regularmente cubierto. La preimagen de cualquier entorno U de $(1,0)$ en $\mathbb{S}^1$ consiste en intervalos de la forma $(0,\varepsilon), (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), (2-\varepsilon, 2) \subset (0,2)$ con $\varepsilon > 0$. Pero las restricciones de p sobre los intervalos $(0,\varepsilon)$ y $(2-\varepsilon, 2)$ no son homeomorfismos sobre U.

2.2 Propiedades de elevación

Definición 2.7. Sean $p : Y \to X$ una aplicación recubridora y $\varphi : Z \to X$ una aplicación continua. Una **elevación** de φ es una aplicación continua $\widetilde{\varphi} : Z \to Y$ tal que $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorema 2.8 (Teorema de unicidad de elevación)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora y sea Z un espacio topológico conexo. Supongamos que $\varphi : Z \to X$ es una aplicación continua y $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2 : Z \to Y$ son elevaciones de φ tales que $\widetilde{\varphi}_1(z) = \widetilde{\varphi}_2(z)$ para algún punto z de Z. Entonces $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2$.*

Teorema 2.9 (Teorema de elevación de homotopía)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora y sea Z un espacio topológico localmente conexo. Supongamos que $\varphi_0, \varphi_1 : Z \to X$ son aplicaciones continuas, $H : Z \times I \to X$ es una homotopía de φ_0 a φ_1 y $\widetilde{\varphi_0} : Z \to Y$ es una elevación de φ_0. Entonces existe una única elevación de H a una homotopía $\widetilde{H}$ tal que $\widetilde{H_0} = \widetilde{\varphi_0}$. Si H es estacionaria en algún subconjunto $A \subseteq Z$, entonces también lo es $\widetilde{H}$.*

Corolario 2.10 (Propiedad de elevación de caminos)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora. Supongamos que $\gamma : I \to X$ es un camino cualquiera en X e $y \in Y$ un punto cualquiera en $p^{-1}(\gamma(0))$. Entonces existe una única elevación $\widetilde{\gamma} : I \to Y$ de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = y$.*

Siempre que $p : Y \to X$ sea una aplicación recubridora usaremos la siguiente notación para las elevaciones de caminos: si $\gamma : I \to X$ es un camino e $y \in p^{-1}(\gamma(0))$, entonces denotaremos como $\widetilde{\gamma}_y : I \to Y$ a la única elevación de γ que satisface $\widetilde{\gamma}_y(0) = y$.

Teorema 2.11 (Teorema de Monodromía)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora. Supongamos que γ y γ' son dos caminos en X con un mismo punto inicial y punto final, y sean $\widetilde{\gamma}_y$ y $\widetilde{\gamma}'_y$ sus elevaciones con el mismo punto inicial $y \in Y$:*

a) $\widetilde{\gamma}_y \sim \widetilde{\gamma}'_y$ *si y solo si* $\gamma \sim \gamma'$.

b) *Si* $\gamma \sim \gamma'$, *entonces* $\widetilde{\gamma}_y(1) = \widetilde{\gamma}'_y(1)$.

Demostración. a) Si $\widetilde{\gamma}_y \sim \widetilde{\gamma}'_y$, teniendo en cuenta que $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}_y$ y $\gamma' = p \circ \widetilde{\gamma}'_y$ y que la homotopía de caminos se conserva bajo la composición con p, entonces se tiene que $\gamma \sim \gamma'$. Por otro lado, si $\gamma \sim \gamma'$, sea $H : I \times I \to X$ la homotopía de caminos entre γ y γ'. Por el teorema (2.9) se tiene que H se eleva a una homotopía $\widetilde{H} : I \times I \to Y$ entre $\widetilde{\gamma}_y$ y alguna elevación de γ' con punto inicial y, la cual, por el teorema (2.8), debe ser igual a $\widetilde{\gamma}'_y$.

b) Por el apartado anterior se tiene que $\gamma \sim \gamma'$ implica que $\widetilde{\gamma}_y$ y $\widetilde{\gamma}'_y$ son homotópicos como caminos y por lo tanto $\widetilde{\gamma}_y(1)$ y $\widetilde{\gamma}'_y(1)$. □

Teorema 2.12 (Teorema de inyectividad)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora. Para cualquier punto $y \in Y$, el homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, p(y))$ es inyectivo.*

Demostración. Sea $[\sigma] \in \pi_1(Y, y)$. Supongamos que $[\sigma] \in \mathrm{Ker}(p_*)$, entonces se tiene que $p_*[\sigma] = [c_x]$, o lo que es lo mismo, $p \circ \sigma \sim c_x$ en X. Por el teorema (2.11) sabemos que cualesquiera elevaciones de $p \circ \sigma$ y c_x con mismo punto inicial deben ser homotópicas como caminos en Y. Teniendo en cuenta que σ y c_y son elevaciones de $p \circ \sigma$ y c_x respectivamente, con punto inicial y, se tiene que $\sigma \sim c_y$ en Y y por lo tanto, $[\sigma] = 1_{\pi_1(Y,y)}$. Se tiene entonces que $\mathrm{Ker}(p_*) = 1_{\pi_1(Y,y)}$ y en consecuencia, $p_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, p(y))$ es un homomorfismo inyectivo de grupos. □

Aplicando el 1º Teorema de Isomorfía al homomorfismo inducido por la aplicación recubridora podemos observar que el grupo fundamental del espacio recubridor es isomorfo a un cierto subgrupo del grupo fundamental de la base. A dicho subgrupo se le llama ***subgrupo inducido por el recubridor***.

Teorema 2.13 (Criterio de elevación)**.** *Supongamos que $p : Y \to X$ es una aplicación recubridor. Sea Z un espacio topológico localmente conexo por caminos y sea $\varphi : Z \to X$ una aplicación continua. Dados $z_0 \in Z$ e $y_0 \in Y$ tal que $p(y_0) = \varphi(z_0)$, la aplicación φ tiene una elevación $\widetilde{\varphi} : Z \to Y$ tal que $\widetilde{\varphi}(z_0) = y_0$ si y solo si el subgrupo $\varphi_*(\pi_1(Z, z_0))$ de $\pi_1(X, \varphi(y_0))$ está contenido en $p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

3 Monodromía

3.1 Acción de Monodromía

Consideremos el recubridor $p : Y \to X$. Para cualquier punto $y \in Y$ con $p(y) = x$, el corolario (2.10) nos dice que todo lazo σ con punto base $x \in X$ tiene una única elevación a un camino $\widetilde{\sigma}_y$ con $\widetilde{\sigma}_y(0) = y$. El hecho de que σ sea un lazo nos garantiza que $\widetilde{\sigma}_y(1) \in p^{-1}(x)$ y por el teorema de monodromía tenemos que $\widetilde{\sigma}_y(1)$ solo depende de $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$. Gracias a esto podemos definir una acción por la derecha del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ sobre la fibra $p^{-1}(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) &\longrightarrow p^{-1}(x) \\ (y, [\sigma]) &\longmapsto y * [\sigma] = \widetilde{\sigma}_y(1). \end{aligned}$$

Para ver que, efectivamente, es una acción, tenemos que comprobar dos cosas:

(1) $y * [c_x] = y$ para cualquier $y \in p^{-1}(x)$, donde c_x denota el camino constante en X, $c_x(t) = x$ para todo $t \in [0, 1]$.

(2) $(y * [\sigma]) * [\sigma'] = y * ([\sigma][\sigma'])$ para $y \in p^{-1}(x)$, $[\sigma], [\sigma'] \in \pi_1(X, x)$.

Por como se ha definido la acción, tenemos que

$$y * [c_x] = c_y(1)$$

donde c_y es la única elevación de c_x con punto inicial y, y como $c_y(1) = y$, se sigue la igualdad de la propiedad (1). Para probar la propiedad (2), sean σ y σ' dos lazos en X con punto base x y sea $z = \widetilde{\sigma}_{1y}(1)$. Por como hemos definido la acción, tenemos que

$$(y * [\sigma]) * [\sigma'] = \widetilde{\sigma}_y(1) * [\sigma'] = z * [\sigma'].$$

Y por otro lado, tenemos que

$$y * ([\sigma][\sigma']) = y * [\sigma\sigma'].$$

Teniendo en cuenta que $\widetilde{\sigma}_y\widetilde{\sigma}'_z$ es la elevación de $\sigma\sigma'$ con punto inicial y, se tiene que

$$y * [\sigma\sigma'] = \widetilde{\sigma}_y\widetilde{\sigma}'_z(1) = \widetilde{\sigma}'_z(1) = z * [\sigma'].$$

Además, ya que Y es conexo por caminos, cualesquiera dos puntos y, y' de la fibra $p^{-1}(x)$ estarán unidos por un camino γ en Y. Si hacemos $\sigma = p \circ \gamma$, vemos inmediatamente que γ es la elevación de σ con punto inicial y, luego $y * [\sigma] = y'$. En consecuencia, esta acción que acabamos de definir, a la que llamaremos ***acción de monodromía***, es una acción transitiva por la derecha de $\pi_1(X, x)$ sobre $p^{-1}(x)$.

Ahora bien, podemos definir la siguiente aplicación

$$T_\sigma : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$$

definida por $T_\sigma(y) = \widetilde{\sigma}_y(1)$, que como hemos visto, solo depende de $[\sigma]$. Claramente T_σ es biyectiva, y por lo tanto, sea $\mathrm{Biy}(p^{-1}(x))$ el grupo de biyecciones de $p^{-1}(x)$, podemos definir el homomorfismo

$$\rho : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Biy}(p^{-1}(x))$$

dado por $\rho([\sigma]) = T_\sigma$, conocido como ***homomorfismo de monodromía*** del recubridor.

Teorema 3.1 (Estabilizadores de la acción de monodromía)**.** *Sea $p : Y \to X$ un recubridor y sea $x \in X$. Para cada $y \in p^{-1}(x)$, se tiene que*

$$\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) = p_*(\pi_1(Y, y)) \subseteq \pi_1(X, x).$$

Demostración. Sea y un punto cualquiera de la fibra $p^{-1}(x)$. Sea $[\sigma] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$, se tiene entonces que $y * [\sigma] = y$. Por la definición de la acción de monodromía, se tiene que $\widetilde{\sigma}_y(1) = y$, es decir, $\widetilde{\sigma}_y$ es un lazo en Y con punto base y lo que implica que $[\widetilde{\sigma}_y] \in \pi_1(Y, y)$. Teniendo en cuenta que $p_*([\widetilde{\sigma}_y]) = [\sigma]$ se puede concluir que $[\sigma] \in p_*(\pi_1(Y, y))$. Por otro lado, supongamos ahora que $[\sigma] \in p_*(\pi_1(Y, y))$. Se tiene entonces que existe un lazo σ' en Y con punto base y tal que $p_*([\sigma']) = [\sigma]$ o lo que es lo mismo, $p \circ \sigma' \sim \sigma$. Sea $\rho = p \circ \sigma'$ por la unicidad de elevación tenemos que $\widetilde{\rho}_y = \sigma'$, y en consecuencia tenemos que $y \cdot [\sigma] = y \cdot [\rho] = \widetilde{\rho}_y(1) = \sigma'(1) = y$, es decir, $[\sigma] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$. □

Como consecuencia directa de este teorema se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Sea $p : Y \to X$ un recubridor y sea $y \in Y$ con $p(y) = x$.*

a) Si σ es un lazo en X con punto base x entonces $\widetilde{\sigma}_y(1) = y$ si y solo si $[\sigma] \in p_*(\pi_1(Y, y))$.

b) Si γ y γ' son dos caminos en X con $\gamma(0) = \gamma'(0) = x$ y $\gamma(1) = \gamma'(1) = x'$ entonces $\widetilde{\gamma}_y(1) = \widetilde{\gamma}'_y(1)$ si y solo si $[\gamma'\gamma^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y, y))$.

En general, el subgrupo inducido por una aplicación recubridora depende del recubrimiento y de la elección del punto base. El siguiente teorema muestra que dicho subgrupo podría cambiar, aunque de una manera muy restringida, cuando cambiamos el punto base dentro de una misma fibra.

Teorema 3.3 (Teorema de conjugación)**.** *Sea $p : Y \to X$ un recubridor. Para cualquier $x \in X$, a medida que y varía sobre $p^{-1}(x)$, el conjunto de los subgrupos inducidos $p_*(\pi_1(Y, y))$ es exactamente una clase de conjugación en $\pi_1(X, x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$, por el teorema (3.1) sabemos que

$$\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) = p_*(\pi_1(Y, y))$$

para todo $y \in p^{-1}(x)$. Por lo tanto tenemos que

$$\{p_*(\pi_1(Y, y)) : y \in p^{-1}(x)\} = \{\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) : y \in p^{-1}(x)\}.$$

Vamos a ver ahora que el conjunto $\{\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) : y \in p^{-1}(x)\}$ es exactamente una clase de conjugación. Sean $y, y' \in p^{-1}(x)$ tal que $y' = y * [\sigma]$ para algún $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y') &= \{[\sigma'] \in \pi_1(X, x) : y' * [\sigma'] = y'\} \\
&= \{[\sigma'] \in \pi_1(X, x) : (y * [\sigma]) * [\sigma'] = y * [\sigma]\} \\
&= \{[\sigma'] \in \pi_1(X, x) : y * ([\sigma][\sigma'][\sigma]^{-1}) = y\} \\
&= \{[\sigma'] \in \pi_1(X, x) : [\sigma][\sigma'][\sigma]^{-1} \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)\} \\
&= [\sigma] \, \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)[\sigma]^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$ y $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y')$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$. Por otro lado, si consideramos el estabilizador $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$ de un punto $y \in p^{-1}(x)$ cualquiera, sea $H = [\sigma] \, \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)[\sigma]^{-1}$ un subgrupo cualquiera de $\pi_1(X, x)$ conjugado a $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$, claramente $H = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y * [\sigma]^{-1})$. Podemos concluir entonces que el conjunto de estabilizadores es exactamente una clase de conjugación y en consecuencia, también lo es el conjunto de los subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ con y variando en $p^{-1}(x)$. □

En el caso en el que el subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$ se tiene que $p_*(\pi_1(Y, y))$ no depende de la elección del punto base dentro de la fibra.

3.2 Recubridores de Galois

Definición 3.4. Un **recubridor de Galois** es un recubridor $p : Y \to X$ tal que para algún $y \in Y$ el subgrupo inducido $p_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, p(y))$.

Estos recubridores también reciben el nombre de ***recubridores normales*** o ***regulares***.

Proposición 3.5 (Caracterización de recubridores normales)**.** *Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Y es un recubridor normal (i.e., $p_*(\pi_1(Y, y)) \lhd \pi_1(X, p(y))$ para algún $y \in Y$).

(b) Para algún $x \in X$, los subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ son los mismos para todo $y \in p^{-1}(x)$.

(c) Para todo $x \in X$, los subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ son los mismos para todo $y \in p^{-1}(x)$.

(d) El subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y))$ es normal para todo $y \in Y$.

Demostración. Supongamos que $p_*(\pi_1(Y, y))$ es subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$ para cualquier punto $y \in Y$. Por ser normal es el único elemento de su clase de conjugación y por el teorema (3.3) se tiene que $p_*(\pi_1(Y, y))$ no depende de la elección del punto base dentro de una misma fibra. Por lo tanto, para cualquier punto $x \in X$ se tiene que $p_*(\pi_1(Y, y))$ es subgrupo normal para todo punto $y \in p^{-1}(x)$. Con esto acabamos de probar la implicación (d) $\Rightarrow$ (c). Las implicaciones (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) son directas, luego solo necesitamos probar (a) $\Rightarrow$ (d).

Supongamos que $p_*(\pi_1(Y, y'))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x')$ para algún punto $y' \in Y$ donde $x' = p(y')$. Sea ahora $y \in Y$ un punto cualquiera tal que $x = p(y)$ y sean $\alpha : I \to Y$ el camino que une y' con y en Y y $\beta = p \circ \alpha$ el camino en X que une x con x'. Sean Φ_α y Φ_β isomorfismos de cambio de punto base definidos por $\Phi_\alpha([\sigma]) = [\overline{\alpha}][\sigma][\alpha]$ y $\Phi_\beta([\rho]) = [\overline{\beta}][\rho][\beta]$, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[d, "p_*"] & \pi_1(Y, y') \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X, x) \arrow[r, "\Phi_\beta"] & \pi_1(X, x')
\end{tikzcd}$$

Además el diagrama es conmutativo, pues

$$p_* \circ \Phi_\alpha([\sigma]) = p_*(\Phi_\alpha([\sigma])) = p_*([\overline{\alpha}][\sigma][\alpha]) = [\overline{\beta}]p_*([\sigma])[\beta] = \Phi_\beta(p_*([\sigma])) = \Phi_\beta \circ p_*([\sigma]).$$

Se tiene entonces que $\Phi_\beta(p_*(\pi_1(Y, y')) = p_*(\pi_1(Y, y))$ y como los isomorfismos de grupos llevan subgrupos normales a subgrupos normales, se tiene que $p_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. $\square$

Acción por la izquierda del grupo fundamental en recubridores de Galois

Sea $p : Y \to X$ un recubridor, vimos que para cualquier $x \in X$ el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ actua por la derecha, mediante la acción de monodromía, sobre la fibra $p^{-1}(x)$. Ahora nuestro objetivo es definir una acción de $\pi_1(X, x)$ por la izquierda no solo sobre las fibras de $p : Y \to X$, sino sobre todo el espacio Y, es decir, para dos elementos $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$ y $z \in Y$ queremos definir otro punto $[\sigma] \cdot z \in Y$. Para que esto sea posible, supondremos que $p : Y \to X$ es un recubridor de Galois.

Sea $y' = y * [\sigma] = \widetilde{\sigma}_y(1)$ y sea γ un camino en Y con $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = z$, teniendo en cuenta que $p(y) = p(y') = x$, el camino $(p \circ \gamma)$, que está definido en X, tiene punto inicial $(p \circ \gamma)(0) = x$. Podemos entonces definir el punto $\widetilde{(p \circ \gamma)}_{y'}(1)$ que denotaremos por $w(z, \sigma, \gamma)$ y que por las propiedades de elevación de caminos podemos escribir como $\widetilde{\sigma(p \circ \gamma)}_y(1)$.

Para que los puntos $w(z, \sigma, \gamma)$ no dependan de la elección de γ tenemos que ver que para otro camino γ' en Y con $\gamma'(0) = y$ y $\gamma'(1) = z$ se tiene

$$w(z, \sigma, \gamma) = w(z, \sigma, \gamma')$$

o equivalentemente,

$$\widetilde{\sigma(p \circ \gamma)}_y(1) = \widetilde{\sigma(p \circ \gamma')}_y(1).$$

Por la proposición (3.2) esta condición es equivalente a

$$[\sigma(p \circ \gamma')(\sigma(p \circ \gamma))^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y, y)).$$

Teniendo en cuenta que $\gamma'\gamma^{-1}$ es un lazo en Y con punto base y, tenemos que

$$\begin{aligned} [\sigma(p \circ \gamma')(\sigma(p \circ \gamma))^{-1}] &= [(\sigma(p \circ \gamma')(p \circ (\gamma^{-1})^{-1})] \\ &= [\sigma][p \circ (\gamma'\gamma^{-1})]\sigma]^{-1} \\ &= [\sigma]p_*([\gamma'\gamma^{-1})]\sigma]^{-1} \end{aligned}$$

luego

$$[\sigma(p \circ \gamma')(\sigma(p \circ \gamma))^{-1}] \in [\sigma]p_*(\pi_1(Y, y))[\sigma]^{-1}.$$

Y por ser p un recubridor de Galois, también es un elemento de $p_*(\pi_1(Y, y))$. Por lo tanto, $w(z, \sigma, \gamma)$ solo depende de z y de $[\sigma]$.

Así pues, podemos definir la siguiente acción por la izquierda:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) \times Y &\longrightarrow Y \\ ([\sigma], z) &\longmapsto [\sigma] \cdot z = w(z, \sigma, \gamma) = \widetilde{\sigma(p \circ \gamma)}_y(1). \end{aligned}$$

Para ver que efectivamente es una acción tenemos que probar dos cosas:

(1) $[c_x] \cdot z = z$ para todo $z \in Y$.

(2) $[\sigma] \cdot ([\sigma'] \cdot z) = ([\sigma][\sigma']) \cdot z$ para $z \in Y$, $[\sigma], [\sigma'] \in \pi_1(X, x)$.

Teniendo en cuenta que $\widetilde{c_x}_y(1) = y$ se tiene que

$$[c_x] \cdot z = \widetilde{c_x(p \circ \gamma)}_y(1) = (p \circ \gamma)_y(1) = z$$

por lo tanto se cumple (1). Para probar (2), teniendo en cuenta que lo caminos $(\sigma\sigma')(p \circ \gamma)$ y $\sigma(\sigma'(p \circ \gamma)$ son homotópicos como caminos, entonces por el teorema de monodromía se tiene que sus elevaciones en Y con punto inicial y tienen mismo punto final y por lo tanto,

$$[\sigma] \cdot ([\sigma'] \cdot z) = ([\sigma][\sigma']) \cdot z.$$

3.3 Grupo de Galois de un recubridor

Definición 3.6. Sean $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ dos recubridores de X. Un **homomorfismo** de recubridores entre p_1 y p_2 es una aplicación continua $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Un ***isomorfismo de recubridores***es un homomorfismo de recubridores que además es un homeomorfismo. Dos recubridores son ***isomorfos*** si existe un isomorfismo de recubridores entre ellos.

Proposición 3.7 (Propiedades de los homomorfismos de recubridores)**.** *Sean $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ dos recubridores de X:*

(a) Si φ y φ' son dos homomorfismos de recubridores tales que $\varphi(y) = \varphi'(y)$ para algún $y \in Y_1$, entonces $\varphi = \varphi'$ en Y_1.

(b) Dado un $x \in X$, cualquier homomorfismo de recubridores de p_1 a p_2 restringido a $p_1^{-1}(x)$ es una aplicación $\pi_1(X, x)$-equivariante, respecto de la acción de monodromía, entre las fibras $p_1^{-1}(x)$ y $p_2^{-1}(x)$.

(c) Cualquier homomorfismo de recubridores es una aplicación recubridora.

Demostración. (a) Teniendo en cuenta que si tenemos dos recubridores p_1 y p_2 de un mismo espacio podemos ver los homomorfismos entre p_1 y p_2 como elevaciones de p_1.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, "p_2"] \\ Y_1 \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Por el teorema (2.8) se tiene que si dos elevaciones coinciden en un punto, entonces son iguales. En consecuencia, si dos homomorfismos de recubridores coinciden en un punto, son iguales.

(b) Sea $\varphi : Y_1 \to Y_2$ un homomorfismo entre los recubridores p_1 y p_2. Por definición, tenemos que $p_2 \circ \varphi = p_1$ lo que implica que $\varphi \circ p_1^{-1}(x) = p_2^{-1}(x)$ para todo $x \in X$. Ahora, para ver que $\varphi|_{p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$ es una aplicación $\pi_1(X, x)$-equivariante tenemos que ver que $\varphi(y * [\sigma]) = \varphi(y) * [\sigma]$ para cualesquiera $y \in p_1^{-1}(x)$, $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$. Sea $\widetilde{\sigma}_y$ la elevación de σ en Y_1 con punto inicial y. Si consideramos el camino $\varphi \circ \widetilde{\sigma}_y$ en Y_2, tenemos que $p_2 \circ (\varphi \circ \widetilde{\sigma}_y) = (p_2 \circ \varphi) \circ \widetilde{\sigma}_y = p_1 \circ \widetilde{\sigma}_y = \sigma$ y además $\varphi \circ \widetilde{\sigma}_y(0) = \varphi(y)$, luego $\varphi \circ \widetilde{\sigma}_y$ es la elevación de σ en Y_2 con punto inicial $\varphi(y)$. Por lo tanto,

$$\varphi(y) * [\sigma] = (\varphi \circ \widetilde{\sigma}_y)(1) = \varphi(\widetilde{\sigma}_y(1)) = \varphi(y * [\sigma]).$$

(c) Sea $\varphi : Y_1 \to Y_2$ un homomorfismo entre los recubridores p_1 y p_2. Para ver que φ es una aplicación recubridora tenemos que ver que φ es sobreyeciva y que todo punto de Y_2 tiene un entorno regularmente cubierto por φ.

Sea $y \in Y_2$ con $x = p_2(y)$ en X. Como p_1 es sobreyectiva, tenemos que $p_1^{-1}(x) \neq \emptyset$ y por el apartado (b) sabemos que $\varphi|_{p_1^{-1}(x)}$ es una aplicación $\pi_1(X, x)$-equivariante. Además, $\varphi|_{p_1^{-1}(x)}$ es una aplicación sobreyectiva pues, sean $w \in p_1^{-1}(x)$ y $z = \varphi(w)$, por la transitividad de la acción de monodromía tenemos que para un punto dado $y' \in p_2^{-1}(x)$ existe un $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$ tal que $y' = z * [\sigma]$, luego $\varphi(w * [\sigma]) = \varphi(w) * [\sigma] = z * [\sigma] = y'$, por lo tanto, cualquier punto de $p_2^{-1}(x)$ está en la imagen de φ, y en particular y. Por lo tanto φ es sobreyectiva.

Sean ahora $N_1^x, N_2^x \subseteq X$ entornos de x regularmente cubiertos por p_1 y p_2 respectivamente, sea $N^x = N_1^x \cap N_2^x$, que sabemos que es no vacío porque $x \in N_1^x \cap N_2^x$. Es claro que N^x es un entorno de x en X regularmente cubierto por p_1 y p_2. Sea ahora V la componente de $p_2^{-1}(N^x)$ que contiene a y. Tenemos que probar que φ lleva cada componente de $\varphi^{-1}(V)$ a V por homeomorfismos. Si consideramos las aplicaciones p_1 y φ restringidas a $p_1^{-1}(N^x)$, ya que V es abierto y cerrado en $p_2^{-1}(N^x)$ se sigue que $\varphi^{-1}(V)$ es abierto y cerrado en $p_1^{-1}(N^x)$, y por lo tanto, es una unión de componentes. En cada componente V_α se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & V \arrow[dl, "p_2"] \\ N^x & \end{tikzcd}$$

por lo tanto, se tiene que $\varphi = p_2^{-1} \circ p_1$ y como tanto p_1 como p_2 restringidas a V_α son homeomorfismos, φ también lo es. $\square$

Teorema 3.8 (Existencia de homomorfismo de recubridores). *Sean $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ dos recubridores de X y sean $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ puntos base tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Entonces existe un homomorfismo de recubridores φ entre p_1 y p_2 tal que $\varphi(y_1) = y_2$ si y solo si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.*

Demostración. Ya que un homomorfismo entre los recubridores p_1 y p_2 se puede ver como una elevación de p_1, por el teorema (2.13) se sigue el resultado. $\square$

Teorema 3.9 (Unicidad de isomorfismo de recubridores). *Sean $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ dos recubridores de X:*

(a) Dados $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$, entonces existe un isomorfismo, necesariamente único, φ de recubridores de p_1 a p_2 tal que $\varphi(y_1) = y_2$ si y solo si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.

(b) Los recubridores Y_1 e Y_2 son isomorfos si y solo si para algún $x \in X$, las clases de conjugación de los subgrupos de $\pi_1(X, x)$ inducidas por p_1 y p_2 son las mismas. En este caso, las clases de conjugación son las mismas para todo $x \in X$.

Demostración. (a) Supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\varphi(y_1) = y_2$ para $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ dados, y sea $x = p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Por el apartado (b) de la proposición (3.7) sabemos que

$$\varphi|_{p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$$

es un $\pi_1(X, x)$-automorfismo que lleva y_1 a y_2. Sea ahora $[\sigma] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1)$, se tiene que

$$y_2 * [\sigma] = \varphi|_{p_1^{-1}(x)}(y_1) * [\sigma] = \varphi|_{p_1^{-1}(x)}(y_1 * [\sigma]) = \varphi|_{p_1^{-1}(x)}(y_1) = y_2,$$

por lo tanto, $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) \subseteq \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$.

Procediendo de la misma manera para $\varphi^{-1}|_{p_2^{-1}(x)} : p_2^{-1}(x) \to p_1^{-1}(x)$, se tiene que

$$\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2) \subseteq \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1)$$

y por lo tanto, $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$. En particular, por el teorema (3.1) se tiene que

$$p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2)).$$

Por otro lado, si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$, por el teorema (3.8) se sabe que existen dos homomorfismos $\varphi : Y_1 \to Y_2$, $\psi : Y_2 \to Y_1$ tales que $\varphi(y_1) = y_2$ y $\psi(y_2) = y_1$. La composición $\psi \circ \varphi : Y_1 \to Y_1$ es un homomorfismo de Y_1 en sí mismo que deja fijo y_1, es decir, coincide en y_1 con la aplicación identidad, por lo tanto, por la proposición (3.7) se tiene que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{Y_1}$. De igual manera se tiene que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{Y_2}$, así pues, φ es el isomorfismo buscado.

(b) Supongamos que $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ son dos recubridores isomorfos. Sea $\varphi : Y_1 \to Y_2$ dicho isomorfismo. Para cualquier punto $x \in X$,

$$\varphi|_{p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$$

es un $\pi_1(X,x)$-automorfismo entre las fibras $p_1^{-1}(x)$ y $p_2^{-1}(x)$. En la demostración del apartado (a) vimos que para $y_1 \in p_1^{-1}(x)$ e $y_2 \in p_2^{-1}(x)$ tales que $\varphi|_{p_1^{-1}(x)}(y_1) = y_2$ se tiene que

$$\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$$

y por lo tanto, $\{\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) : y_1 \in p_1^{-1}(x)\} = \{\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2) : y_2 \in p_2^{-1}(x)\}$. Como los estabilizadores de la acción de monodromía son exactamente los subgrupos inducidos por los recubrimientos, se tiene que p_1 y p_2 inducen la misma clase de conjugación de los subgrupos de $\pi_1(X,x)$.

Por otro lado, supongamos que dos recubridores de un mismo espacio X, $p_1 : Y_1 \to X$ y $p_2 : Y_2 \to X$ inducen la misma clase de conjugación para algún punto $x \in X$. Sea $y_1^{-1}(x)$, por el teorema (3.3), existe algún $y_2 \in Y_2$ tal que $p_{1*}(\pi_1(Y_1,y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2,y_2))$, y por lo tanto, por el apartado (a), existe un isomorfismo entre p_1 y p_2 que lleva y_1 a y_2. Razonando de igual manera que en el párrafo anterior, se tiene que p_1 y p_2 inducen la misma clase de conjugación en $\pi_1(X,x')$ para cualquier otro punto base $x' \in X$. $\square$

Definición 3.10. Sea $p : Y \to X$ un recubridor. Un **automorfismo** de Y es un isomorfismo del recubridor Y en sí mismo, esto es, un homeomorfismo $\varphi : Y \to Y$ tal que $p \circ \varphi = p$, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Los automorfismos de recubridores también reciben el nombre de ***transformaciones deck***. El conjunto

$$\mathrm{Aut}(Y/X) = \{\varphi : Y \to Y : \varphi \text{ es un homeomorfismo tal que } p \circ \varphi = p\}$$

de todos los automorfismos del recubridor $p : Y \to X$ tiene esctructura de grupo con la composición usual de aplicaciones, pues tanto la composición de automorfismos, como la inversa de un automorfismo y la aplicación identidad de Y son todas automorfismos. Este grupo $\mathrm{Aut}(X/Y)$ recibe el nombre de ***grupo de Galois del recubridor***.

Proposición 3.11 (Propiedades del Grupo de Galois)**.** *Sea $p : Y \to X$ un recubridor:*

a) Si dos automorfismos coinciden en un punto, entonces son iguales.

b) Dado un $\in X$, cada automorfismo restringido a la fibra $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X,x)$-automorfismo respecto de la acción de monodromía.

c) Para cualquier abierto $N \subseteq X$ regularmente cubierto, cada automorfismo permuta las componentes de $p^{-1}(N)$.

d) El grupo $\mathrm{Aut}(X/Y)$ actúa de manera libre sobre Y por homeomorfismos.

Demostración. Teniendo en cuenta que que los automorfismos de p son homeomorfismos de Y en sí mismo, por la proposición (3.7) se demuestran inmediatamente los apartados (a) y (b).

(c) Sea $N \subset X$ un abierto de X regularmente cubierto por p, y sea V_α una componente de $p^{-1}(N)$. Por ser φ un homeomorfismo, $\varphi(V_\alpha)$ es un subconjunto conexo de $p^{-1}(N)$, por lo tanto debe estar contenido en una sola componente V'_α de $p^{-1}(N)$. Ahora bien, usando este mismo argumento para $\varphi^{-1}(V'_\alpha)$ se tiene que $\varphi(V_\alpha)$ es exactamente una componente de $p^{-1}(N)$.

(d) Por definición, $\mathrm{Aut}(Y/X)$ actúa sobre Y por homeomorfismos. Además, por el apartado (a) sabemos que la identidad es la única aplicación que deja todos los puntos fijos y por lo tanto, la acción de $\mathrm{Aut}(Y/X)$ sobre Y es libre. $\square$

El siguiente teorema, que es consecuencia directa del teorema de Unicidad de isomorfismos de recubridores, nos muestra un criterio para decidir cuando dos puntos de una misma fibra están en la misma órbita del grupo de Galois del recubrimiento.

Teorema 3.12. *Sea $p : Y \to X$ un recubridor. Si $y_1, y_2 \in Y$ son dos puntos de la misma fibra $p^{-1}(x)$, entonces existe un automorfismo φ tal que $\varphi(y_1) = y_2$ si y solo si los subgrupos inducidos $p_*(\pi_1(Y, y_1))$ y $p_*(\pi_1(Y, y_2))$ de $\pi_1(X, x)$ son iguales.*

Demostración. La demostración es inmediata por el teorema (3.9). $\square$

Como consecuencia de este teorema tenemos una forma alternativa de caracterizar los recubridores normales.

Corolario 3.13. *Sea $p : Y \to X$ un recubridor. El grupo de Galois del recubrimiento $\mathrm{Aut}(Y/X)$ actúa de forma transitiva sobre cada fibra si y solo si Y es un recubridor normal.*

Demostración. Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora y sea $x \in X$ un punto cualquiera. Por el teorema (3.5) tenemos que p es un recubridor de Galois si y solo si los subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ son iguales para todo punto y de la fibra $p^{-1}(x)$. Y por el teorema (3.12) tenemos que los subgrupos $p_*(\pi_1(Y, y))$ son iguales para todo punto y de la fibra $p^{-1}(x)$ si y solo si $\mathrm{Aut}(Y/X)$ actúa de forma transitiva sobre $p^{-1}(x)$. $\square$

Teorema 3.14. *Sea $p : Y \to X$ un recubridor y sea $x \in X$ un punto cualquiera. La aplicación $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(x)}$ es un isomorfismo entre $\mathrm{Aut}(Y/X)$ y el grupo de $\pi_1(X, x)$-automorfismos de $p^{-1}(x)$.*

Demostración. Por el apartado (b) de la proposición (3.11), sabemos que para un $x \in X$ cualquiera, cada elemento $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ restringido a $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X, x)$-automorfismo de $p^{-1}(x)$. Además, sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(Y/X)$, se tiene que $(\varphi_1 \circ \varphi_2)|_{p^{-1}(x)} = \varphi_1|_{p^{-1}(x)} \circ \varphi_2|_{p^{-1}(x)}$. Por lo tanto, la aplicación $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(x)}$ es un homomorfismo entre $\mathrm{Aut}(Y/X)$ y el grupo de $\pi_1(X, x)$-automorfismos de $p^{-1}(x)$. Ahora tenemos que ver que dicho homomorfismo es inyectivo y sobreyectivo.

El apartado (a) de la proposición (3.11) nos dice que si dos automorfismos coinciden en algún punto de la misma fibra, entonces deben de ser iguales, por lo tanto, la aplicación $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(x)}$ es inyectiva. Para ver la sobreyectividad de la aplicación, sea $\eta : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ un $\pi_1(X, x)$-automorfismo de $p^{-1}(x)$. Sean $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ tal que $\eta(y_1) = y_2$ y sea $[\sigma] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1)$. Se tiene que

$$y_2 * [\sigma] = \eta(y_1) * [\sigma] = \eta(y_1 * [\sigma]) = \eta(y_1) = y_2,$$

donde la segunda igualdad se obtiene de la $\pi_1(X, x)$-equivarianza de η. Por lo tanto, $[\sigma] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$, es decir, se tiene que $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) \subseteq \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$. Procediendo de la misma manera para η^{-1}, que sabemos que existe por ser η un $\pi_1(X, x)$-automorfismo, llegamos a la conclusión de que $\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_1) = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y_2)$ y en consecuencia, por el teorema (3.1), $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$. Ahora, por el teorema (3.12), se tiene que existe un automorfismo de recubridores φ tal que $\varphi(y_1) = y_2$. Como η y $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ son dos $\pi_1(X, x)$-isomorfismos de $p^{-1}(x)$ tal que $\eta(y_1) = y_2 = \varphi|_{p^{-1}(x)}(y_1)$, han de ser iguales y por lo tanto, la aplicación $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(x)}$ es sobreyectiva. $\square$

Teorema 3.15 (Teorema de Estrucura del Grupo de Galois)**.** *Sean $p : Y \to X$ un recubridor, $y \in Y$ y $x = p(y)$. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo:*

$$\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \frac{N_{\pi_1(X,x)}(p_*(\pi_1(Y, y))}{p_*(\pi_1(Y, y))}.$$

Demostración. Dada la aplicación recubridora $p : Y \to X$ y sean $y \in Y$ un punto arbitrario y $x \in X$ tal que $x = p(y)$. Sea $[\rho] \in N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))$, se tiene también que $[\rho]^{-1} \in N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))$. Por lo tanto, si $y' = y * [\rho]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) &= [\rho]\,\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)[\rho]^{-1} \\
&= \{[\rho'] \in \pi_1(X,x) : [\rho][\rho'][\rho]^{-1} \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)\} \\
&= \{[\rho'] \in \pi_1(X,x) : y * ([\rho][\rho'][\rho]^{-1}) = y\} \\
&= \{[\rho'] \in \pi_1(X,x) : (y * [\rho]) * [\rho'] = y * [\rho]\} \\
&= \{[\rho'] \in \pi_1(X,x) : y' * [\rho'] = y'\} \\
&= \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y'),
\end{aligned}$$

y por el teorema (3.1), $p_*(\pi_1(Y,y)) = p_*(\pi_1(Y,y'))$. Además, por el teorema (3.12) sabemos que existe un único $\pi_1(X,x)$-automorfismo φ_ρ tal que $\varphi_\rho(y) = y'$.

Sea $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$ el grupo de $\pi_1(X,x)$-automorfismos de $p^{-1}(x)$. Definimos ahora la aplicación

$$F : N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)) \to \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$$

tal que $F([\rho]) = \varphi_\rho$. Sean $[\rho_1], [\rho_2] \in N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))$, se tiene que

$$\varphi_{\rho_1} \circ \varphi_{\rho_2}(y) = \varphi_{\rho_1}(y * [\rho_2]) = \varphi_{\rho_1}(y) * [\rho_2] = y * [\rho_1][\rho_2] = \varphi_{\rho_1\rho_2}(y).$$

Como dos $\pi_1(X,x)$-automorfismos que coinciden en un punto son iguales, se tiene que $\varphi_{\rho_1} \circ \varphi_{\rho_2} = \varphi_{\rho_1\rho_2}$ y en particular, $F(\rho_1)F(\rho_2) = F(\rho_1\rho_2)$, por lo tanto la aplicación F es un homomorfismo. Además, sea ahora φ un $\pi_1(X,x)$-automorfismo de $p^{-1}(x)$, como $\pi_1(X,x)$ actúa de manera transitiva sobre $p^{-1}(x)$, existe un $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$ tal que $y * [\sigma] = \varphi(y)$ y por el teorema (3.12) se tiene que $p_*(\pi_1(Y,y)) = p_*(\pi_1(Y, y * [\sigma]))$, en particular,

$$\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y) = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y * [\sigma]) = [\sigma]^{-1}\,\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)[\sigma]$$

por el teorema (3.1). Luego $[\rho]^{-1} \in N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))$ y en consecuencia $[\rho]$ también. Así, hay un único $\pi_1(X,x)$-automorfismo φ_ρ tal que $\varphi_\rho(y) = y * [\rho]$ y como $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$, se tiene que $\varphi_\rho = \varphi$.

Por lo tanto la aplicación F es un homomorfismo sobreyectivo entre los grupos $N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))$ y $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$. Ahora, por el primer teorema de isomorfía, en su versión para grupos,tenemos el siguiente isomorfismo,

$$\begin{tikzcd}
N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x)) \\
\frac{N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))}{\mathrm{Ker}(F)} \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Im}(F) \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$ por ser F sobreyectiva y $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$ pues $[\rho] \in \mathrm{Ker}(F)$ si y solo si $F([\rho]) = \varphi_\rho = \mathrm{Id}_{p^{-1}(x)}$, es decir, si y solo si $y = \mathrm{Id}_{p^{-1}(x)}(y) = \varphi_\rho(y) = y * [\rho]$, es decir, si y solo si $[\rho] \in \mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)$. Por lo tanto se tiene que

$$\frac{N_{\pi_1(X,x)}(\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y))}{\mathrm{Stab}_{\pi_1(X,x)}(y)} \cong \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x)).$$

Por el teorema (3.1) se tiene que

$$\frac{N_{\pi_1(X,x)}(p_*(\pi_1(Y,y)))}{p_*(\pi_1(Y,y))} \cong \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x)).$$

Por úlitmo, por el teorema (3.14), tenemos que $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x)) \cong \mathrm{Aut}(Y/X)$, y por lo tanto,

$$\frac{N_{\pi_1(X,x)}(p_*(\pi_1(Y,y)))}{p_*(\pi_1(Y,y))} \cong \mathrm{Aut}(Y/X).$$

□

Como casos particulares del teorema anterior se obtienen los siguientes corolarios cuya demostración es inmediata:

Corolario 3.16. *Si $p : Y \to X$ es un recubridor normal, entonces para cualesquiera $x \in X$, $y \in p^{-1}(x)$ se tiene que $\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(Y,p^{-1}(x)))$.*

Corolario 3.17. *Si $p : Y \to X$ es un recubridor e Y es simplemente conexo, entonces se tiene que $\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \pi_1(X,x)$.*

3.4 G-recubridores

Una acción por la derecha de un grupo G sobre un conjunto Y es ***propiamente discontinua*** si para cada $y \in Y$ existe un entorno $V \subseteq Y$ tal que $V \cdot g = \{y \cdot g : y \in V\}$ y $V \cdot h = \{y \cdot h : y \in V\}$ son disjuntos para cualesquiera $g, h \in G$. Este tipo de acciones también reciben el nombre ***acciones de espacios recubridores***.

Teorema 3.18. *Sean Y un espacio topológico conexo y localmemente conexo por caminos y G un grupo que actúa sobre Y. Sea $X = Y/G$ el espacio de órbitas o clases de equivalencia. Entonces se tiene que la aplicación cociente $p : Y \to X$ es una aplicación recubridora si y solo si la acción de G es propiamente discontinua. En este caso, p es un recubridor normal y además $\mathrm{Aut}(Y/X) = G$.*

Demostración. Supongamos que $p : Y \to X$ es una aplicación recubridora donde $X = Y/G$. Sea $y \in Y$ un punto cualquiera y sea $x = p(y)$. Sea $N^x \subseteq X$ un entorno de x regularmente cubierto por p. Por definición, sabemos que podemos escribir $p^{-1}(N^x)$ como la unión disjunta de abiertos de Y tal que la restricción de p a cada uno de esos abiertos es un homeomorfismo sobre N^x. Sea V uno de esos abiertos tal que $y \in V$. Se tiene que para cualquier $g \in G$ con $g \neq 1_G$, $(V \cdot g) \cap V = \emptyset$, pues de no ser así, si $y_1 \in (V \cdot g) \cap V$, entonces existe un $y_2 \in V$ tal que $y_2 \cdot g = y_1$ y se tendría que $p(y_1) = p(y_2)$ y por lo tanto, la restricción de p a V no sería inyectiva, y en consecuencia no sería un homeomorfismo. Así, para todo $g, h \in G$ con $g \neq h$ se tiene que

$$(V \cdot g) \cap (V \cdot h) = ((V \cdot gh^{-1}) \cap V) \cdot h = \emptyset$$

luego G actúa de manera propiamente discontinua sobre Y.

Por otro lado, supongamos que el grupo G actúa sobre Y de manera propiamente discontinua. La aplicación $p : Y \to Y/G$ es continua y además es abierta, pues para todo abierto $V \subseteq Y$ se tiene que $p^{-1}(p(V))$ es la unión de los abiertos $V \cdot g$ para $g \in G$. Como G actúa de manera propiamente discontinua, dicha unión es disjunta. Ahora, sea $p|_{V \cdot g} : V \cdot g \to p(V)$ la restricción de p sobre cada abierto $V \cdot g$ de Y. Como $p(y \cdot g) = p(y)$ para todo $y \in V$, se tiene que p es sobreyectiva. Además, para $y_1, y_2 \in V$ tal que $p(y_1 \cdot g) = p(y_2 \cdot g)$ se tiene que existe un $h \in G$ tal que $y_1 \cdot gh = y_2 \cdot g$ y como G actúa de manera propiamente discontinua, se tiene que $h = 1_G$, luego $y_1 \cdot g = y_2 \cdot g$ y en consecuencia, $p|_{V \cdot g}$ es inyectiva. Así pues, se tiene que $p|_{V \cdot g}$ es un homeomorfismo y por lo tanto $p : Y \to Y/G$ es una aplicación recubridora.

Por último, si a todo $g \in G$ le hacemos corresponder la aplicación $\widetilde{g} : Y \to Y$; $y \mapsto \widetilde{g}(y) = yg$, es claro que $p \circ \widetilde{g} = p$, por lo tanto $\widetilde{g} \in \mathrm{Aut}(Y/X)$, y en particular $G \subseteq \mathrm{Aut}(Y/X)$. Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$, para un $y \in Y$ dado, se tiene que $p \circ \varphi(y) = p(y)$, luego existe un $g \in G$ tal que $y \cdot g = \varphi(y)$. Como $y \mapsto y \cdot g$ y φ son dos automorfismos que coinciden en un punto, por la proposición (3.11), son iguales, por lo tanto $\mathrm{Aut}(Y/X) = G$. Por construcción, G actúa transitivamente sobre cada fibra y como acabamos de ver que $G = \mathrm{Aut}(Y/X)$, por el corolario (3.13) se tiene que p es un recubridor normal. □

Definición 3.19. Sea G un grupo. Un **G-recubridor** es un recubridor $p : Y \to X$ tal que G actúa de manera propiamente discontinua sobre Y y además $X = Y/G$.

Dos G-recubridores $p : Y \to X$, $p' : Y' \to X$ son isomorfos como G-recubridores si existe un homeomorfismo $\varphi : Y \to Y'$ tal que $p' \circ \varphi = p$ y además $\varphi(y \cdot g) = \varphi(y) \cdot g$ para cualesquiera $g \in G$, $y \in Y$. Es decir, un ***isomorfismo de G-recubridores*** es un isomorfismo de recubridores G-equivariante.

Lema 3.20. *Sea $p : Y \to X$ un G-recubridor, entonces para cualquier punto $x \in X$ existe un entorno $N^x \subseteq X$ de x tal que el G-recubridor $p|_{p^{-1}(N^x)} : p^{-1}(N^x) \to N^x$ es isomorfo al G-recubridor trivial $N \times G \to N$, es decir, todo G-recubridor es localmente trivial como G-recubridor.*

Para un G-recubridor $p : Y \to X$, G actúa de forma transitiva sobre cada una de las fibras $p^{-1}(x)$ de p. Por el teorema (3.18) sabemos que si $p : Y \to X$ es un G-recubridor entonces también será un recubridor normal y además $\mathrm{Aut}(Y/X) = G$ y por el corolario (3.13) tenemos que por ser p un recubridor normal, $\mathrm{Aut}(Y/X)$ actúa de forma transitiva sobre cada fibra.

También como consecuencia del corolario (3.17) tenemos que si $p : Y \to X$ es un G-recubridor y además Y es simplemente conexo, entonces el grupo fundamental de X es isomorfo a G. En general, este isomorfismo depende de la elección del punto base y, salvo isomorfismos internos. En particular, si G es un grupo abeliano, el isomorfismo es independiente de las elecciones de los puntos base.

Monodromía en G-recubridores

Recordemos que, para un recubridor $p : Y \to X$, con punto base $y_0 \in Y$, si $x_0 = p(y_0)$, la monodromía viene definida por el homomorfismo

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Biy}(p^{-1}(x_0));\ [\sigma] \mapsto \rho([\sigma]) = T_\sigma,$$

donde $T_\sigma(y) = \widetilde{\sigma}_y(1)$ para todo $y \in p^{-1}(x_0)$. Ahora bien, si $p : Y \to X$ es un G-recubridor, sabemos que G actúa de forma transitiva sobre cada una de las fibras, luego para cualquier $y \in p^{-1}(x_0)$ existe un elemento $g \in G$ tal que $\widetilde{\sigma}_y(1) = yg$. Por lo tanto, podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \rho_{y_0} : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow G \\ [\sigma] &\longmapsto \rho_{y_0}([\sigma]) = g^{-1}. \end{aligned}$$

tal que $\widetilde{\sigma}_{y_0}(1) = y_0 g$.

Proposición 3.21 (Monodromía en G-recubridores)**.** *Sea $p : Y \to X$ un G-recubridor y sea $y_0 \in Y$ con $p(y_0) = x_0$ un punto base. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \rho_{y_0} : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow G \\ [\sigma] &\longmapsto \rho_{y_0}([\sigma]) = g^{-1}. \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $[\sigma], [\sigma'] \in \pi_1(X, x_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_0(\rho_{y_0}([\sigma])^{-1}\rho_{y_0}([\sigma'])^{-1}) &= (y_0\rho_{y_0}([\sigma])^{-1})\rho_{y_0}([\sigma'])^{-1} = \widetilde{\sigma}_{y_0}(1)\rho_{y_0}([\sigma'])^{-1} \\ &= \widetilde{\sigma}_{y_0\rho_{y_0}([\sigma'])^{-1}}(1) = \widetilde{\sigma}_{\widetilde{\sigma'}_{y_0}(1)}(1) \\ &= \widetilde{\sigma'\sigma}_{y_0}(1) = y_0\rho_{y_0}([\sigma'][\sigma])^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho_{y_0}([\sigma])^{-1}\rho_{y_0}([\sigma'])^{-1} = \rho_{y_0}([\sigma'][\sigma])^{-1}.$$

De donde se deduce que

$$\rho_{y_0}([\sigma'][\sigma]) = \rho_{y_0}([\sigma'])\rho_{y_0}([\sigma]).$$

Luego ρ_{y_0} es un homomorfismo. $\square$

Vamos a ver ahora como se comporta el homomorfismo de monodromía si hacemos variar el punto base y_0 a lo largo de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$. Sea $y_0' \in \pi^{-1}(x_0)$, y consideremos el homomorfismo de monodromía

$$\rho_{y_0'} : \pi_1(X, x_0) \to G,$$

se tiene entonces que

$$\widetilde{\sigma}_{y_0'}(1) = y_0'\rho_{y_0'}([\sigma])^{-1}.$$

Como G actúa de forma transitiva sobre $\pi^{-1}(x_0)$, $y_0' = y_0h$ para algún $h \in G$, luego se tiene

$$\widetilde{\sigma}_{y_0'}(1) = y_0h\rho_{y_0'}([\sigma])^{-1},$$

y también

$$\widetilde{\sigma}_{y_0'}(1) = \widetilde{\sigma}_{y_0}(1)h = y_0\rho_{y_0}([\sigma])^{-1}h.$$

Por lo tanto,

$$y_0h\rho_{y_0'}([\sigma])^{-1} = y_0\rho_{y_0}([\sigma])^{-1}h,$$

de donde se deduce

$$\rho_{y_0'}([\sigma])^{-1} = h^{-1}\rho_{y_0}([\sigma])^{-1}h,$$

y en consecuencia,

$$\rho_{y_0'}([\sigma]) = h^{-1}\rho_{y_0}([\sigma])h.$$

Esto es, ρ_{y_0} y $\rho_{y_0'}$ son homomorfismos conjugados.

3.5 Recubridor Universal

Sea $p : Y \to X$ una aplicación recubridora, se dice que es el ***recubridor universal*** de X si Y es un espacio simplemente conexo, es decir $\pi_1(Y, y) = \{0\}$.

Definición 3.22. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **semilocalmente simplemente conexo** si para cualquier punto $x \in X$ existe un entorno abierto $N^x \subseteq X$ de x tal que cualquier lazo definido en N^x con punto base x es nulhomotópico en X, es decir, es homotopico al camino constante c_x.

Observación 3.23. Hay que tener en cuenta que el lazo usado en la definición se define en el entorno N^x pero la homotopía que lo lleva a c_x está definida en todo X.

Proposición 3.24.

(a) Sea $p : Y \to X$ un recubridor simplemente conexo. Para cualquier otro recubridor $p' : Y' \to X$ de X existe una aplicación recubridora $P : Y \to Y'$ tal que $p' \circ P = p$.

(b) Dos recubridores simplemente conexos del mismo espacio son siempre isomorfos.

Demostración. (a) Sean $p : Y \to X$ y $p' : Y' \to X$ dos recubridores de un mismo espacio X. Sea $y \in Y$ un punto cualquiera y $x \in X$ tal que $x = p(y)$. Como $\pi_1(Y, y) = \{0\}$ está contenido en cualquier subgrupo de $\pi_1(X, x)$, en particular estará contenido en $p'_*(\pi_1(Y', y'))$ donde $y' \in Y'$ tal que $p'(y') = x$. Por el teorema (3.8) se tiene que existe un homomorfismo de recubridores entre p y p', y por el apartado (c) de la proposición (3.7) se tiene que dicho homomorfismo es una aplicación recubridora.

(b) Si $p : Y \to X$ y $p' : Y' \to X$ son dos recubridores simplemente conexos de un mismo espacio X, se tiene que $\pi_1(Y, y) = \{0\} = \pi_1(Y', y')$ para cualesquiera $y \in Y$, $y' \in Y'$. Luego por el apartado (a) del teorema (3.9) se tiene que los recubridores son isomorfos. $\square$

La primera parte de la proposición nos dice que un espacio recubridor simplemente conexo de un espacio X es también recubridor del resto de recubridores de X. Esta es la razón por la que a dicho recubridor se le conoce como recubridor universal.

Definición 3.25. Sea X un espacio topológico. Se dice que es **localmente simplemente conexo** si X admite una base de abiertos simplemente conexos.

Enunciamos el siguiente teorema sin demostración. Una demostración del mismo puede encontrarse en [4].

Teorema 3.26 (Existencia del recubridor universal)**.** *Todo espacio topológico conexo y localmente simplemente conexo tiene recubridor universal.*

Proposición 3.27. *Sea X un espacio topológico conexo, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Para cualquier subgrupo H de $\pi_1(X, x)$ existe un recubridor conexo $p_H : Y_H \to X$, con punto base $y_H \in {p_H}^{-1}(x)$ tal que el subgrupo inducido por ${p_H}_*$ es H. Además, si K es un subgrupo de $\pi_1(X, x)$ que contiene a H, entonces existe una única aplicación continua $p_{H,K} : Y_H \to Y_K$ tal que $p_{H,K}(y_H) = y_K$ y es compatible con las proyecciones de X. Esta aplicación es una aplicación recubridora y si H es un subgrupo normal de K, entonces $p_{H,K}$ es un G-recubridor con $G = H/K$.*

Podemos encontrar una demostración de esta proposición en [3].

A cada subgrupo H del grupo fundamental de X le corresponde un recubridor $p_H : Y_H \to X$ que podemos identificar con el recubridor universal $u_H : \widetilde{X}/H \to X$, donde H actúa de manera propiamente discontinua sobre $\widetilde{X}$ como subgrupo de $Aut(\widetilde{X}/X) = \pi_1(X, x)$. Vemos también que los recubridores de Galois de X corresponden a los subgrupos normales H de $\pi_1(X, x)$, esto significa que todo G-recubridor $p : Y \to X$ tiene la forma $\widetilde{X}/H \to X$, con $\pi_1(X, x)/H \cong Aut(Y/X) \cong G$.

3.6 G-recubridores y representación del grupo fundamental

En la demostración del Teorema de Estructura del Grupo de Galois vimos que para una aplicación recubridora $p : Y \to X$ existe homomorfismo sobreyectivo

$$F : N_{\pi_1(X,x)}(p_*(\pi_1(Y, y))) \to \mathrm{Aut}(Y/X)$$

con $\mathrm{Ker}(F) = p_*(\pi_1(Y, y))$. Si $p : Y \to X$ es un G-recubridor, por el teorema (3.18) sabemos que p es un recubridor normal y además $\mathrm{Aut}(Y/X)$ es isomorfo a G. Por ser p recubridor normal, se tiene que $p_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$, luego $N_{\pi_1(X,x)}(p_*(\pi_1(Y, y))) = \pi_1(X, x)$. Por lo tanto, tenemos un homomorfismo sobreyectivo entre $\pi_1(X, x)$ y G, y por el primer teorema de isomorfía, se tiene que G es isomorfo a $\pi_1(X, x)/H$, donde $H = p_*(\pi_1(Y, y))$. Como hemos visto en la sección anterior, el espacio Y es el cociente del recubridor universal $\widetilde{X}$ de X por la acción de H. La idea del siguiente teorema es poder extender esta correspondencia a todos los G-recubridores de un espacio, tanto conexo como no conexos.

Proposición 3.28. *Sea X un espacio topológico que tiene recubridor universal y sea $x_0 \in X$ un punto base cualquiera. Sea G un grupo. Se tiene que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de homomorfismos de $\pi_1(X, x_0)$ a G y el conjunto de G-recubridores con punto base de X, salvo isomorfismo:*

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G) \leftrightarrow \{G\text{-recubridores de } X \text{ con punto base}\}/\{\text{isomorfismos}\}.$$

Demostración. **Paso 1** (Construcción de un G-recubridor a partir de un homomorfismo): Sea $F : \pi_1(X, x_0) \to G$ un homomorfismo. Sea $\widetilde{X}$ el recubridor universal del espacio X. Dando a G la topología discreta se tiene que $\widetilde{X} \times G$ es un producto de copias de $\widetilde{X}$, una para cada elemento de G. Definimos ahora la acción por la izquierda de $\pi_1(X, x)$ sobre $\widetilde{X} \times G$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times (\widetilde{X} \times G) &\longrightarrow \widetilde{X} \times G \\ ([\sigma], (z, g)) &\longmapsto ([\sigma] \cdot z, F([\sigma]) \cdot g) \end{aligned}$$

para $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, $z \in \widetilde{X}$, $g \in G$ donde $[\sigma] \cdot z$ es la acción definida en la sección (3.2) de $\pi_1(X, x)$ sobre $\widetilde{X}$ y $gF([\sigma]^{-1})$ es la operación del grupo G. Definimos ahora el espacio Y_F como el cociente de $\widetilde{X} \times G$ por la acción de $\pi_1(X, x)$

$$Y_F = (\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x).$$

Denotando por $[z, g]$ la imagen en Y_F de los puntos (z, g) de $\widetilde{X} \times G$, tenemos que

$$[[\sigma] \cdot z, g] = [[\sigma]^{-1} \cdot ([\sigma] \cdot z, g)] = [z, F([\sigma]^{-1}) \cdot g].$$

Ahora definimos la aplicación $p_F : Y_F \to X$ de manera que $[z, g] \mapsto p_F([z, g]) = u(z)$. Si hacemos actuar a G sobre Y_F de manera que para $h \in G$, $[z, g] \cdot h = [z, gh]$, se tiene que G actúa de manera propiamente discontinua sobre Y_p y por lo tanto, $p_F : Y_F \to X$ es un G-recubridor. Teniendo en cuenta que el recubridor universal $u : \widetilde{X} \to X$ es un $\pi_1(X, x)$-recubridor, por el lema (3.20) se tiene que u es localmente trivial como $\pi_1(X, x)$-recubridor. Sea N un abierto de X tal que el recubridor universal $u : \widetilde{X} \to X$ es trivial, se tiene entonces que $u^{-1}(N^x) \cong N^x \times \pi_1(X, x)$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} p_F^{-1}(N^x) = \{[z, g] \in Y_F : p_F([z, g]) \in N^x\} &= \{[z, g] \in Y_F : u(z) \in N^x\} \\ &= (u^{-1}(N^x) \times G)/\pi_1(X, x), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$p_F^{-1}(N^x) \cong ((N^x \times \pi_1(X, x)) \times G)/\pi_1(X, x) \cong N^x \times G$$

Estos homeomorfismos son compatibles con las proyecciones sobre N^x, y se sigue entonces que la acción de G es propiamente discontinua y el recubridor

$$p_F|_{p_F^{-1}(N^x)} : p_F^{-1}(N^x) \to N^x$$

es un G-recubridor. Como X está cubierto por esos abiertos N se tiene que $p_F : Y_F \to X$ es un G-recubridor.

Paso 2 (Construcción de un homomorfismo a partir de un G-recubridor): Sea $p : Y \to X$ un G-recubridor y sea $y_0 \in Y$ un punto base, con $x_0 = p(y_0)$. Usamos el homomorfismo de monodromía dado en la proposición (3.21)

$$\rho_{y_0} : \pi_1(X, x_0) \to G.$$

Paso 3 (Correspondencia): Por un lado, sea $p : Y \to X$ un G-recubridor y sea ρ_{y_0} el homomorfismo del paso 2. Vamos a ver que el G-recubridor $p_{\rho_{y_0}} : Y_{\rho_{y_0}} \to X$ construido a partir de ρ_{y_0} en el paso 1 es isomorfo a p. Identificando a $\widetilde{X}$ como el conjunto de clases de equivalencia de los caminos en X con punto inicial x, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} A : \widetilde{X} \times G &\longrightarrow Y \\ ([\gamma], g) &\longmapsto A([\gamma], g) = \widetilde{\gamma}_y(1)g = \widetilde{\gamma}_{yg}(1), \end{aligned}$$

que claramente es continua. Ahora, sean $([\gamma], g)$ un punto cualquiera de $\widetilde{X} \times G$ y sea $([\sigma][\gamma], \rho_{y_0}([\sigma])g)$ otro punto de $\widetilde{X} \times G$, nótese que $[[\gamma], g] = [[\sigma][\gamma], \rho_{y_0}([\sigma])g]$ en $(\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x_0) = Y_F$, se tiene que

$$\begin{aligned} A([\sigma][\gamma], \rho_{y_0}([\sigma])g) &= \widetilde{\sigma\gamma}_y(1) \cdot (\rho_{y_0}([\sigma])g) = \widetilde{\gamma}_{\widetilde{\sigma}_y(1)}(1) \cdot (\rho_{y_0}([\sigma])g) \\ &= \widetilde{\gamma}_{\widetilde{\sigma}_y(1) \cdot (\rho_{y_0}([\sigma])g)}(1) = \widetilde{\gamma}_{\widetilde{\sigma}_{y_0 \cdot (\rho_{y_0}([\sigma])g)}}(1) \\ &= \widetilde{\gamma}_{\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\sigma_y^{-1}}(1)}(1) \cdot g}(1) = \widetilde{\gamma}_{\widetilde{\sigma^{-1}\sigma}_y(1) \cdot g}(1) \\ &= \widetilde{\gamma}_{y \cdot g}(1) = A([\gamma], g) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $B : \widetilde{X} \times G \to (\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x_0)$ es la proyección natural al cociente, podemos definir la aplicación $C : Y_F \to Y$ como $C = B^{-1} \circ A$, es decir, C factoriza por el cociente

$$Y_{\rho_{y_0}} = (\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x_0)$$

dado por la acción

$$[\sigma]([\gamma], g) = ([\sigma][\gamma], \rho_{y_0}([\sigma])g).$$

Es claro que C es un homomorfismo de recubridores, y más en concreto, es un homomorfismo de G-recubridores y por lo tanto debe ser un isomorfismo.

Por otro lado, sea $F : \pi_1(X, x_0) \to G$ un homomorfismo, sea $p_F : Y_F \to X$ el G-recubridor construido en el paso 1 y sea $\bar{F} : \pi_1(X, x_0) \to G$ el homomorfismo construido a partir del G-recubridor p_F en el paso 2. Para $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ cualquiera se tiene que

$$\begin{aligned} [z, 1_G] \cdot \bar{F}([\sigma])^{-1} &= \widetilde{\sigma}_{[z, 1_G]}(1) = [\widetilde{\sigma}_z(1), 1_G] \\ &= [[\sigma] \cdot z, 1_G] = [z, F([\sigma]^{-1})1_G] \\ &= [z, F([\sigma]^{-1})] = [z, 1_G] \cdot F([\sigma]^{-1}) \\ &= [z, 1_G] \cdot F([\sigma])^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F = \bar{F}$. □

Nótese que si hacemos variar el homomorsimo de monodromía a lo largo de la misma fibra, éste tan solo cambia por la conjugación por un elemento de G, de modo que, en virtud de la proposición anterior, tenemos que existe la siguiente correspondencia:

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)/G \leftrightarrow \{G\text{-recubridores de } X\}/\{\text{isomorfismos}\}.$$

Donde el cociente por G en el primer término se toma con respecto de la acción de G mediante automorfismos internos. El conjunto $\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)/G$ se denomina **variedad de caracteres** de X y se denota por $\mathcal{R}_G(X)$.

Teorema 3.29 (Correspondencia de G-recubridores)**.** *Sea X un espacio topológico con recubridor universal y sea $x_0 \in X$ un punto base. Sea G un grupo. Existe una correspondencia biyectiva entre la variedad de caracteres de X y el conjunto de sus G-recubridores salvo isomorfismos:*

$$\mathcal{R}_G(X) \leftrightarrow \{G\text{-recubridores de } X\}/\{\text{isomorfismos}\}.$$

4 Teoría gauge

A lo largo de esta sección consideraremos las variedades diferenciables E, M y F y la aplicación sobreyectiva $\pi : E \to M$.

4.1 Fibrados

Primeras definiciones

Definición 4.1. Sea $x \in M$ un punto. Llamaremos **fibra** de π sobre x a $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\{x\}) \subset E$.

Si $U \subset M$, denotaremos la fibra de π sobre U como $\pi^{-1}(U)$. Podemos pensar $\pi^{-1}(U)$ como la parte de E que se encuentra sobre U.

Definición 4.2. Una **sección (global)** es una aplicación diferenciable $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Si $s : U \subset M \to E$ tal que $\pi \circ s' = \mathrm{Id}_U$ diremos que s es una **sección local**.

Denotaremos por $\Gamma(M, E)$ al conjunto de secciones de $\pi : E \to M$.

Nota 4.3. Sea $U \subset M$ un abierto de M y sea $s : U \subset M \to E$ una aplicación diferenciable. s es sección local si y solo si $s(x) \in \pi^{-1}(x)$ para cualquier punto $x \in U$.

En general, para dos puntos distintos $x, y \in M$, las fibras $\pi^{-1}(x)$ y ,$\pi^{-1}(y)$ pueden ser muy diferentes, aunque vengan de la misma aplicación sobreyectiva. Pueden no ser subvariedades regulares de E y, en caso de serlo, pueden no ser difeomorfas.

Definición 4.4. Un **fibrado** es una tupla $\xi = (E, \pi, M; F)$ tal que para cualquier punto $x \in M$, existe un entorno abierto $U \subset M$ alrededor de x y un difeomorfismo $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_U = \pi$, donde $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ es la proyección canónica a la primera componente, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Diremos que E es el **espacio total**, M la **base** del fibrado, F la **fibra general** y π la **proyección**. Al par (U, ϕ_U) se le denomina **trivialización local (en torno a x)**, a U **entorno trivializante** y a ϕ_U **aplicación trivializante**. Una **trivialización del fibrado** es una colección de trivializaciones locales $\{(U_i, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Proposición 4.5. *Para un fibrado $\xi = (E, \pi, M; F)$ cualquiera, $\pi^{-1}(x)$ es siempre una subvariedad regular del espacio total E. Además, la aplicación $\phi_{U_x} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_U|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to F$ es un difeomorfismo entre la fibra $\pi^{-1}(x)$ y la fibra general F.*

Demostración. Sea (U, ϕ_U) una trivialización local de ξ entorno a un punto $x \in M$. Como $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ es un difeomorfismo y $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ es una submersión ya que ${\mathrm{pr}_1}_*$ es sobreyectiva, tenemos entonces que $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \phi_U$ es una submersión. Por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita tenemos que $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad regular de E. □

Ejemplo 4.6. (Fibrado Trivial) Sean M y F dos variedades diferenciables. Tomando $E = M \times F$ y $\pi = pr_1$, tenemos que $\xi = (M \times F, pr_1, M; F)$ es un fibrado, conocido como Fibrado Trivial.

Aplicaciones entre fibrados

Definición 4.7. Sean $(E, \pi, M; F)$ y $(E', \pi', M'; F')$ dos fibrados. Se conoce como **morfismo de fibrados** a una aplicación diferenciable $H : E \to E'$ tal que existe una aplicación diferenciable $f : M \to M'$ tal que $\pi' \circ H = f \circ \pi$, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

En otras palabras, un morfismo de fibrados es una aplicación diferenciable que preserva las fibras. Hay que tener en cuenta que H determina f de manera única por la sobreyectividad de π. En este caso se dice que H ***cubre*** f.

Definición 4.8. Dos fibrados sobre la misma base, $(E, \pi, M; F)$ y $(E', \pi', M; F')$, son **isomorfos** si existe un morfismo de fibrados H tal que $f : M \to M$ es la identidad y H es un difeomorfismo.

Definición 4.9. Un fibrado $\xi = (E, \pi, M; F)$ es **trivial** si es isomorfo al fibrado trivial.

La existencia de una trivialización local $\{(U, \phi_U)\}$ en un fibrado $\xi = (E, \pi, M; F)$ implica que la restricción

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U$$

es un fibrado isomorfo al fibrado trivial $(U \times F, \mathrm{pr}_1, U; F)$. Es por esto que se dice que los fibrados son **localmente triviales**.

Fibrado inducido

Sea $\xi = (E, \pi, M; F)$ un fibrado. Si $f : N \to M$ es una aplicación diferenciable entre una variedad diferenciable N y la base de ξ, vamos a ver que el par (E, f) define un fibrado sobre N con la misma fibra que ξ.

Lema 4.10. *Sea $\xi = (E, \pi, M; F)$ un fibrado y sea W una subvariedad regular de M, entonces la restricción $\pi|_{E_W} : E_W \to W$ es un fibrado con fibra general F.*

Demostración. Sea $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ una trivialización de ξ. El conjunto $\{V_i\}_{i \in I}$ con $V_i = U_i \cap W$ es un recubrimiento por abiertos de W y las aplicaciones

$$\psi_i = \phi|_{\pi^{-1}(V_i)} : \pi^{-1}(V_i) \to V_i \times F$$

son difeomorfismos tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \psi_{V_i} = \pi_W$. Por lo tanto, $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es una trivialización para π. $\square$

Teorema 4.11. *Sea $\xi = (E, \pi, M; F)$ un fibrado y sea N una variedad diferenciable. Supongamos que $f : N \to M$ es una aplicación diferenciable. Entonces $\xi_f = (f^*E, \pi_N, N; F)$ es un fibrado sobre N, llamado **fibrado inducido de** E **por** f, donde*

$$f^*E = \{(x, e) \in N \times E | f(x) = \pi(e)\}$$

y $\pi_N : f^*E \to N; (x, e) \mapsto \pi_N(x, e) = x$.

Demostración. Sea $\xi = (E, \pi, M; F)$ un fibrado y sea N una variedad diferencial, es claro que $(N \times E, N \times M, \mathrm{Id} \times \pi; F)$ es un fibrado. Ahora, sea

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in N \times M : x \in M\}$$

la gráfica de la función f, sabemos que Γ_f es una subvariedad regular de $M \times N$, por lo tanto, por el lema (4.10) tenemos que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & \pi_{N\times M}^{-1}(\Gamma_f) \subset N \times E \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\pi"] \\ & \Gamma_f \end{tikzcd}$$

es un fibrado. Ahora, teniendo en cuenta que $(x, e) \in \pi_{N\times M}^{-1}(\Gamma_f)$ si y solo si $\pi(e) = f(x)$, como conjunto, $\pi_{N\times M}^{-1}(\Gamma_f) = f^*E$ define una estructura diferenciable sobre f^*E, por lo tanto tenemos que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & f^*E \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\pi"] \\ & \Gamma_f \end{tikzcd}$$

es un fibrado.

Por otro lado, sabemos que existe un difeomorfismo

$$\begin{aligned} \tau : \Gamma_f &\longrightarrow N \\ (x, f(x)) &\longmapsto \tau(x, f(x)) = x, \end{aligned}$$

luego podemos definir un fibrado sobre N mediante la proyección $\tau \circ (\mathrm{Id} \times \pi)$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & f^*E \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\pi"] \arrow[dr, dashed] & \\ & \Gamma_f \arrow[r, "\tau"] & N. \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como se tiene que $\tau \circ (\mathrm{Id} \times \pi) = \pi_N$, ya que para cualquier $(x, e) \in f^*E$

$$\tau \circ (\mathrm{Id} \times \pi)(x, e) = \tau(x, \pi(x)) = x = \pi_N(x, e),$$

podemos concluir que $\xi_f = (f^*E, \pi_N, N; F)$ es un fibrado. $\square$

Observación 4.12. Los fibrados ξ y ξ_f tienen la misma fibra general F. Esto sucede porque para todo punto $x \in N$, $\pi_N^{-1}(x)$ es difeomorfo a $\pi^{-1}(f(x))$ vía el difeomorfismo $\pi_N^{-1}(x, e) \mapsto e$.

Funciones de transición y grupo de estructura

Definición 4.13. Sea $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ una trivialización de un fibrado $\xi = (E, \pi, M; F)$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se definen las **funciones de transición** asociadas a dicha trivialización como

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{(U_i\cap U_j)\times F} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F.$$

Las funciones de transición definen isomorfismos de los fibrados triviales $(U_i \cap U_j) \times F$. Sean $b \in (U_i \cap U_j)$, $p \in F$, tenemos entonces que

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{(U_i\cap U_j)\times F}(b, p) = (b, q),$$

con $q = g_{ij}(b)(p)$. Lo que significa que existe una aplicación

$$g_{ij} : (U_i \cap U_j) \to \mathrm{Diff}(F)$$

tal que $\phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{(U_i\cap U_j)\times F}(b, p) = (b, g_{ij}(b)(p))$. A estas funciones g_{ij} también reciben el nombre de **funciones de transición** del fibrado. Son diferenciables en el sentido de que la aplicación g_{ij} : $(U_i \cap U_j) \times F \to F$; $(b, p) \mapsto g_{ij}(b)(p)$ es diferenciable.

Lema 4.14. *Las funciones de transición de un fibrado satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} g_{ii}(x) &= \mathrm{Id}_F \quad \textit{para } x \in U_i, \\ g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x) &= \mathrm{Id}_F \quad \textit{para } x \in U_i \cap U_j, \\ g_{ik}(x) \circ g_{kj}(x) \circ g_{ji}(x) &= \mathrm{Id}_F \quad \textit{para } x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned}$$

La tercera ecuación se conoce como la **condición de cociclo***.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición. □

La siguiente proposición nos muestra que podemos (re)-construir un fibrado partiendo de sus funciones de transición usando un espacio cociente adecuado. Las tres propiedades del lema anterior nos aseguran la existencia de una relación de equivalencia, que será la que se utilice para la construcción de ese espacio cociente.

Lema 4.15. *Sea $\xi = (E, \pi, M; G)$ un fibrado y consideremos el espacio*

$$\bar{E} = \bigsqcup_{i \in I} U_i \times F.$$

Denotando los elementos de $\bar{E}$ como (i, b, p) donde $i \in I$, $b \in U_i$ y $p \in F$. La relación en $\bar{E}$ dada por

$$(i, b, p) \sim (j, c, q) \textit{ si y solo si } b = c \textit{ y } p = g_{ij}(b)(p)$$

para cualesquiera (i, b, p), $(j, c, q) \in \bar{E}$, es una relación de equivalencia.

Demostración. Sea $(i, b, p) \in \bar{E}$. Es claro que $(i, b, p) \sim (i, b, p)$ pues $b = b$ y por la primera ecuación del lema (4.14)

$$p = g_{ii}(b)(p) = p,$$

por lo tanto $\sim$ es reflexiva.

Si consideramos ahora un $(j, c, q) \in \bar{E}$ tal que $(i, b, p) \sim (j, c, q)$, tenemos que $b = c$ y $p = g_{ij}(b)(q)$, de donde se tiene que $g_{ij}(b)^{-1}(p) = q$ y por la segunda ecuación del lema (4.14) tenemos que

$$q = g_{ji}(b)(p),$$

por lo tanto $\sim$ es simétrica.

Por último, considerando ahora un $(k, c, r) \in \bar{E}$ tal que $(i, b, p) \sim (j, c, q) \sim (k, d, r)$, tenemos que $b = c = d$, $p = g_{ij}(b)(q)$ y $q = g_{jk}(b)(r)$. Luego, $p = g_{ij}(b)(g_{jk}(b)(r))$ y en consecuencia

$$p = g_{ji}^{-1}(b)(r) = g_{ij}(b)(r)$$

donde las igualdades se tienen de la tercera ecuación y de la primera ecuación del lema (4.14) respectivamente. Por lo tanto $\sim$ es transitiva y en consecuencia $\sim$ define una relación de equivalencia. □

Proposición 4.16. *Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de M y sea $\{g_{ij} : M \to \mathrm{Diff}(F)\}_{i,j \in I}$ una familia de funciones diferenciables que satisfacen la condición del cociclo. Entonces existe un fibrado $\xi = (E, \pi, M; F)$ tal que las funciones $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ son sus funciones de transición.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de M. Sea también $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ una familia de funciones diferenciables que cumplen las condiciones del cociclo. Si para otra variedad diferenciable F definimos el espacio $\bar{E}$ y la relación de equivalencia $\sim$ como en el lema anterior y definimos el espacio $E = \bar{E}/\sim$ como el cociente de $\bar{E}$ dado por $\sim$, para cada $i \in I$, $U_i \times F$ es un subespacio de E, de hecho, E admite una estructura diferenciable que hace que $U_i \times F$ sea una subvariedad abierta. Por lo tanto, considerando la aplicación diferenciable $\pi : E \to M$; $(i, b, p) \mapsto \pi(i, b, p) = b$ se tiene que $\xi = (E, \pi, M; F)$ es un fibrado. □

Definición 4.17. Sea $\xi = (E, \pi, M; F)$ un fibrado y sea $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ una trivialización de ξ tal que las correspondientes funciones de transición g_{ij} definen aplicaciones diferenciables entre $U_i \cap U_j$ y un grupo de Lie de transformaciones $G \subset \mathrm{Diff}(F)$. Entonces se dice que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ define una **G-estructura** en ξ con **grupo de estructura** G.

Si ξ es un fibrado con grupo de estructura G, se dice que una trivialización local (U, ϕ) es **compatible** con la G-estructura si existe una aplicación $g_i : (U \cap U_i) \to \mathrm{Diff}(F)$ tal que $\phi \circ \phi_i(b, p) = (b, g_i(b)(p))$ para cualesquiera $b \in U \cap U_i$, $p \in F$ y tal que la imagen de cada g_i esté contenida en G y la aplicación $g_i : (U \cap U_i) \to G$ sea diferenciable.

Si las imágenes de las funciones de transición g_{ij} están contenidas en un subgrupo de Lie H de G, entonces podemos considerar ξ como un fibrado con grupo de estructura H. Diremos entonces que el grupo de estructura G de ξ es ***reducible*** a H. Usando esta terminología podemos decir que un fibrado ξ es trivial si y solo si su grupo de estructura es reducible al subgrupo trivial.

Fibrados principales

Entre los fibrados, los fibrados principales juegan un papel muy importante. Usaremos P en lugar de E para denotar el espacio total del fibrado con el fin de poner énfasis en el hecho de que hablaremos de fibrados principales.

Definición 4.18. Sea G grupo de Lie. Un fibrado $\xi = (P, \pi, M; G)$ es un **G-fibrado principal** si G actúa sobre P por la derecha, preservando las fibras de π, de forma libre y transitiva sobre cada una de ellas, siendo esta una acción diferenciable, y además existe una trivialización $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ tal que los difeomorfismos $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ son aplicaciones G-equivariantes.

En un G-fibrado principal podemos identificar la base con el cociente del espacio total dado por la acción de G, es decir, $M = P/G$.

El hecho de que los difeomorfismos $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ sean aplicaciones G-equivariantes quiere decir que $\psi_i(p \cdot g) = \psi_i(p) \cdot g$ para cualesquiera $p \in \pi^{-1}(U_i)$, $g \in G$. Esto significa que $\psi_i(p) = (\pi(p), g_i(p))$ donde $g_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$ es una aplicación G-equivariante.

Para dos trivializaciones locales de ξ, $\{(U_i, \psi_i)\}$, $\{(U_j, \psi_j)\}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sea $x \in U_i \cap U_j$ y sea $p \in \pi^{-1}(x)$, tenemos entonces que $\psi_i(p) = (x, g_i(p))$ y $\psi_j(p) = (x, g_j(p))$, de donde se tiene que existe $h_p \in G$ tal que $g_i(p) = h_p g_j(p)$, por lo tanto,

$$h_p = g_i(p) g_j(p)^{-1}.$$

Siempre que nos mantengamos dentro de la misma fibra, el valor h_p no varía, se mantiene constante ya que por la G-equivarianza de g_i y g_j se tiene que

$$h_{p\cdot g} = g_i(p \cdot g) g_j(p \cdot g)^{-1} = g_i(p) g g^{-1} g_j(p) = h_p$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto, podemos definir una aplicación

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$$

definida para todo $x \in U_i \cap U_j$ como $g_{ij}(x) = h_p = g_i(p) g_j(p)^{-1}$ para un $p \in \pi^{-1}(x)$ cualquiera.
Si ahora definimos la aplicación

$$g_{ij}(x) : G \to G$$

dada por $g_{ij}(x)(h) = (g_i(x) g_j^{-1}(x))h$ para todo $h \in G$, es claro que $g_{ij}(x)$ es diferenciable y define un difeomorfismo de G para todo $x \in U_i \cap U_j$. Además, por como está definida $g_{ij}(x)$ se tiene que, para todo $h \in G$,

$$g_{ii}(x)(h) = h \text{ para todo } x \in U_i,$$
$$(g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x))(h) = h \text{ para todo } x \in U_i \cap U_j,$$
$$(g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) \circ g_{ki}(x))(h) = h \text{ para todo } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Por lo tanto, estas funciones g_{ij} son funciones de transición para $\xi = (P, \pi, M; G)$.

Podemos dar entonces una definición diferente para los G-fibrados principales, esta vez involucrando su grupo de estructura.

Definición 4.19. Sea G un grupo de Lie. Diremos que el fibrado $\xi = (P, \pi, M; G)$ es un **G-fibrado principal** si tiene grupo de estructura G y además actúa sobre sí mismo por traslación a la izquierda.

Definición 4.20. Sean (P, π, M, G) y (P', π', M', G') dos fibrados principales diferentes y sean $\rho : G \to G'$ un homomorfismo de grupos de Lie y $f : M \to M'$ una aplicación diferenciable. Se dice que $H : P \to P'$ es un **morfismo de fibrados principales** si es un morfismo de fibrados ρ-equivariante, es decir, si $\pi' \circ H = f \circ \pi$ y $H(p \cdot g) = H(p) \cdot \rho(g)$ para cualesquiera $p \in P$, $g \in G$.

Lema 4.21. *Cualquier morfismo de fibrados principales entre G-fibrados con misma base es un difeomorfismo.*

Demostración. El objetivo es ver H es un difeomorfismo tenemos que probar que es biyectiva. Para ver que H es una aplicación inyectiva. Sean p_1,$p_2 \in P$ tales que $H(p_1) = H(p_2)$, se tiene que p_1 y p_2 pertenecen a la misma fibra pues

$$\pi(p_1) = \pi' \circ H(p_1) = \pi'(H(p_1)) = \pi'(H(p_2)) = \pi' \circ H(p_2) = \pi(p_2).$$

Ahora, como G actúa por la derecha de forma transitiva sobre $\pi^{-1}(p_1)$, existe un único $g \in G$ tal que $p_1 = p_2 \cdot g$. Por lo tanto, se tiene que

$$H(p_1) = H(p_2 \cdot g) = H(p_2) \cdot g = H(p_1) \cdot g,$$

y como la acción de G también es libre, se tiene que $g = 1_G$ y en particular, por lo tanto, $p_1 = p_2$. Para la sobreyectividad, sea $p' \in P'$, buscamos un $\widetilde{p} \in P$ tal que $H(\widetilde{p}) = p'$. Sea $p \in \pi^{-1}(\pi'(p'))$, tenemos que

$$\pi' \circ H(p) = \pi'(H(p)) = \pi(p) = \pi'(p'),$$

por lo tanto, p' y $H(p)$ están en la misma fibra. Luego existe un único $g \in G$ tal que $H(p) \cdot g = p'$ y en consecuencia $H(p \cdot g) = p'$. Sea $p \cdot g = \widetilde{p}$ se tiene que $H(\widetilde{p}) = p'$. □

Proposición 4.22. *Un G-fibrado principal es trivial si y solo si admite una sección.*

Demostración. Es claro que todo G-fibrado principal trivial admite una sección. Por otro lado, sea $\xi = (P, \pi; M : G)$ un G-fibrado principal que admite una sección. Si consideramos la aplicación

$$H : M \times G \to P$$

definida de forma que $H(x, g) = s(x) \cdot g$, es claro que H es un morfismo de fibrados entre $(M \times G, \mathrm{pr}_1, M; G)$ y ξ, y por el lema anterior, H es un isomorfismo. □

Ya que un G fibrado principal $\xi = (P, \pi, M; G)$ es localmente trivial, se tiene que existen secciones locales. De hecho, si $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es una trivialización, existen secciones locales $s_i : U_i \to P$ asociadas a dicha trivialización de manera que $\psi_i \circ s_i(x) = (x, 1_G)$ para todo $x \in U_i$. Teniendo en cuenta que para $p \in \pi^{-1}(x)$ se tiene qie $\psi_i(p) = (\pi(p), g_i(p))$, tenemos entonces que la aplicación $g_i \circ s_i : U_i \to G$ es una aplicación constante que manda cada punto de U_i a la identidad de G. Por otro lado, una sección local nos va a permitir identificar la fibra $\pi^{-1}(x)$ con G. Para cualquier $p \in \pi^{-1}(x)$, como $s_i(x) \in \pi^{-1}(x)$ y la acción de G es libre y transitiva en cada una de las fibras, se tiene que existe un único $g \in G$ tal que $p = s_i(x) \cdot g$, en particular, $g = g_i(p)$ pues, teniendo en cuenta la G-equivarianza de g_i y que $g_i \circ s_i(x) = 1_G$ se tiene que

$$g_\alpha(p) = g_\alpha(s_\alpha(x) \cdot g) = g_\alpha(s_\alpha(x))g = g.$$

Si consideramos ahora dos secciones locales $s_i : U_i \to P$ y $s_j : U_j \to P$ asociadas a dos trivializaciones $\{(U_i, \psi_i)\}$ y $\{(U_j, \psi_j)\}$ tal que $U_j \cap U_j \neq \emptyset$. Sea $x \in U_i \cap U_j$, sabemos que para todo $p \in \pi^{-1}(x)$ tenemos que

$$p = s_i(x) \cdot g_i(p),$$
$$p = s_j(x) \cdot g_j(p).$$

Por lo tanto,

$$s_i(x) \cdot g_i(p) = s_j(x) \cdot g_j(p)$$

de donde se sigue que

$$s_i(x) = (s_j(x) \cdot g_j(p)) \cdot g_i(p)^{-1} = s_j(x) \cdot (g_j(p) g_i(p)^{-1}) = s_j(x) \cdot g_{ij}(x).$$

4.2 Conexiones y curvatura

Conexiones y curvatura en G-fibrados principales

Definición 4.23. Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Se define el **espacio tangente vertical** del espacio total P en un punto $p \in \pi^{-1}(x)$ como el subespacio de T_pP dado por $V_p = T_p(\pi^{-1}(x)) \subset T_pP$, o dicho de otra manera, $V_p = \mathrm{Ker}((\pi_*)_p)$. A su vez se define un **espacio tangente horizontal** de P en el mismo punto p como un subespacio H_p de T_pP complementario a V_p, es decir, $T_pP = V_p \oplus H_p$

Proposición 4.24. *Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Para cualquier punto $p \in P$ se tiene que la aplicación $\sigma_p : \mathfrak{g} \to V_p; v \mapsto \sigma_p(v) = \tilde{v}_p$ donde $\tilde{v}$ es su campo vectorial fundamental determinado por la acción de G en P, es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Sea $v \in \mathfrak{g}$, teniendo en cuenta que $\widetilde{v}$ se define para cada $p \in \pi^{-1}(x)$ como $\widetilde{v} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p\exp(tv))$. Se tiene entonces que

$$(\pi_*)_p(\widetilde{v}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(p\exp(tv)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(p) = 0$$

luego $\widetilde{v}$ es vertical. Además, el hecho de que G actúe de forma libre sobre $\pi^{-1}(x)$implica que $\sigma_p : \mathfrak{g} \to V_p$ es un isomorfismo. □

Definición 4.25. Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Una **conexión** A en ξ es una regla que a cada punto $p \in P$ asigna un subespacio $(H_A)_p$ del espacio tangente T_pP tal que $(H_A)_p$ es diferenciable, G-invariante por la derecha y $(H_A)_p \oplus V_p = T_pP$.

En definitiva, una conexión A nos ofrece una distribución H_A en el espacio total, transversal a las fibras y tal que para todo $g \in G$, $R_{g*}((H_A)_p) = (H_A)_{p \cdot g}$. Esta distribución recibe el nombre de ***distribución horizontal asociada*** a la conexión A.

La G-invariancia de una conexión significa que a lo largo de la fibra $\pi^{-1}(x)$, los subespacios horizontales son "paralelos" respecto de la traslación por la derecha a lo largo de la fibra. En particular, cada $(H_A)_p$ a lo largo de $\pi^{-1}(x)$ está determinado por un $(H_A)_{p_0}$, ya que la acción de G es transitiva en las fibras de P.

Estas definiciones son análogas para el caso de fibrados generales, con la salvedad de que a las conexiones en fibrados generales no se les pide la condición de invariancia.

Definición 4.26. Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal y sea A una conexión de ξ. Se define un **G-fibrado principal con conexión** como el par (P, A).

Definición 4.27. La **1-forma de conexión** de una conexión A en un G-fibrado principal $\xi = (P, \pi, M; G)$ es la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ definida por $\omega_A(v) = w$ si $v = \tilde{w}$ y $\omega_A(v) = 0$ si v es horizontal.

Proposición 4.28. *Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal y sea $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ una 1-forma de conexión de la conexión A en ξ. Entonces se cumple que $R_g^* \omega_A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_A$.*

Demostración. Sea $v \in (H_A)_p$, se tiene que, por la propia definición de ω_A,

$$\mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ \omega_A(v) = 0.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $R_g^* \omega_A = \omega_A \circ R_{g*}$, por la G-invarianza de H_A se tiene que $R_{g*}(v) \in (H_A)_{pg}$, por lo tanto $R_g^* \omega_A(v) = 0$.

Si $v \in V_p$, por la proposición (4.24), sabemos que $v = \widetilde{w}$ para algún $w \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, se tiene que

$$R_g^* \omega_A(v) = R_g^* \omega_A(\widetilde{w}) = \omega_A(R_{g*}(\widetilde{w})) = \omega_A(\widetilde{\mathrm{ad}_{g^{-1}} w}) = \mathrm{ad}_{g^{-1}} w = \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ \omega_A(v).$$

Donde la tercera igualdad se da por la proposición (1.13). $\square$

Proposición 4.29. *Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Para una 1-forma $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ tal que $\omega(\widetilde{v}) = v$ para todo $v \in \mathfrak{g}$ y tal que $R_g^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$, existe una conexión cuya 1-forma de conexión es ω.*

Demostración. Sea $p \in P$ y sea $H_p = \{v \in T_pP : \omega_A(v) = 0\}$. Por hipótesis tenemos que $\omega(v) = v$ para cualquier $v \in V_p \cong \mathfrak{g}$, por lo tanto, H_p es transversal a las fibras y se da la descomposición $T_pP = V_p \oplus H_p$. Por otro lado, de la condición $R_g^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$ se deduce que $H_{p \cdot g} = R_{g*}(H_p)$. Ya que ω es diferenciable, se tiene que H_p depende diferenciablemente de p y por lo tanto H_p es una distribución horizontal asociada a una cierta conexión en ξ. $\square$

También podemos definir una conexión A de un G-fibrado principal $\xi = (P, \pi, M; G)$ en términos de sucesiones exactas como una escisión de la sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & TP \arrow[r, "\pi_*"] & \pi_* TM \arrow[r] \arrow[l, bend right, "A"'] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $V = \mathrm{Ker}(\pi_*)$ es, por definición, el fibrado tangente vertical y $H_A = A(\pi_* TM)$ la distribución horizontal asociada a la conexión A, que por supuesto verifica $(H_A) \oplus V = TP$. De manera equivalente, podemos definir una escisión de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & TP \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[l, bend right, "\omega_A"'] & \pi_* TM \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde en este caso, ω_A determina la conexión A cuya distribución horizontal es $H_A = \mathrm{Ker}(\omega_A)$. Como por la proposición (4.24) sabemos que los subespacios vectoriales V_p del espacio tangente vertical son isomorfos al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G la aplicación $\omega_A : TP \to \mathfrak{g}$ puede entenderse como una 1-forma en P con valores en $\mathfrak{g}$, es decir, $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$.

Campos gauge

Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión A y sea $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ la 1-forma de conexión. Teniendo en cuenta que para una trivialización $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ existen secciones locales $s_i : U_i \to P$ asociadas a cada trivialización local, podemos definir localmente 1-formas en abiertos de M de la siguiente manera:

Definición 4.30. Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión A y sea $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ la 1-forma de conexión. El **campo gauge** asociado a la sección local $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ es la 1-forma

$$A_i := s_i^* \omega_A \in \Omega^1(U_i; \mathfrak{g}).$$

La 1-forma A_i también recibe el nombre de **1-forma local de curvatura**.

Es de notable importancia conocer la relación de dos campos gauge según cambia la sección local que los define.

Teorema 4.31. *Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión A y sean A_i y A_j dos campos gauge asociados a las secciones locales $s_i : U_i \to P$ y $s_j : U_j \to P$ respectivamente, tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces se tiene que*

$$A_j = \mathrm{ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ A_i + g_{ij}^* \theta.$$

Donde $\theta : T_g G \to \mathfrak{g}$ denota la forma de Maurer-Cartan.

Demostración. Sean $A_i = s_i^* \omega_A$ y $A_j = s_j^* \omega_A$ dos campos gauge asociados a las secciones locales $s_i : U_i \to P$ y $s_j : U_j \to P$ respectivamente con $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sabemos que ambas secciones se relacionan de manera que $s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$ para todo $x \in U_{ij}$ donde $g_{ij} : U_{ij} \to G$ es la función de transición asociada a las trivializaciones locales correspondientes. Ahora, en U_{ij} tenemos que

$$A_j = s_j^* \omega_A = \omega_A \circ s_{j*}.$$

Nuestro objetivo es escribir $\omega_A \circ s_{j*}$ en términos de A_i y g_{ij}. Para ello, para cada $x \in U_{ij}$, $v \in T_x U_{ij}$, por la regla de Leibniz podemos escribir

$$(s_{j*})_x(v) = d_x s_j(v) = d_x s_i(v) g_{ij}(x) + s_i(x) d_x g_{ij}(v) = (s_{i*})_x(v) g_{ij}(x) + s_i(x)(g_{ij*})_x(v).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\omega_A \circ s_{j*} = \omega_A(s_{i*} g_{ij} + s_i g_{\alpha\beta *}) = \omega_A(s_{\alpha *} g_{ij}) + \omega_A(s_i g_{ij*}).$$

Por un lado, teniendo en cuenta que

$$d_x s_i(X) g_{ij}(x) = R_{g_{ij}(x)*}(d_x s_i(X)),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_A(d_x s_i(X) g_{ij}(x)) &= \omega_A(R_{g_{ij}(x)*}(d_x s_i(X))) = R^*_{g_{ij}(x)} \omega_A(d_x s_i(X)) \\ &= \mathrm{ad}_{g_{ij}(x)^{-1}} \circ \omega_A(d_x s_i(X)) = \mathrm{ad}_{g_{ij}(x)^{-1}} \circ A_i(X) \end{aligned}$$

luego

$$\omega_A(s_{i*} g_{ij}) = \mathrm{ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ A_i.$$

Por otro lado, si $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ es la aplicación que asigna a cada $a \in \mathfrak{g}$ su campo fundamental y θ denota la forma de Maurer-Cartan, entonces

$$\sigma(\theta(d_x g_{ij}(X)))_{s_i(x) g_{ij}(x)} = s_i(x) d_x g_{ij}(X)$$

por lo tanto

$$\omega_A(s_i(x) d_x g_{ij}(X)) = \omega_A(\sigma(\theta(d_x g_{ij}(X)))_{s_i(x) g_{ij}(x)}) = \theta(d_x g_{ij}(X)) = g_{ij}^* \theta(X)$$

luego

$$\omega_A(s_i g_{ij*}) = g_{ij}^*\theta.$$

Así pues, podemos concluir que

$$A_j = \mathrm{ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ A_i + g_{ij}^*\theta,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Acabamos de ver que dada una 1-forma de conexión ω_A definida globalmente podemos obtener diferentes 1-formas de conexión definidas de manera local en los diferentes abiertos trivializantes del fibrado.

Ejemplo 4.32. Si $\xi = (P, \pi, M; G)$ es un G-fibrado principal trivial. Por la proposición (4.22) sabemos que ξ admite una sección (global) $s_0 : M \to P$. Sea A una conexión en ξ con 1-forma de conexión ω_A, podemos definir el campo gauge $A_0 = s_0^*\omega_A \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$. Por ser un fibrado trivial, esta 1-forma determina completamente la conexión A, y en consecuencia podemos identificar el espacio de conexiones de ξ con el espacio de 1-formas $\mathfrak{g}$-valuadas en M, $\Omega^1(M; \mathfrak{g})$. Por lo tanto, para cualquier G-fibrado principal trivial se puede identificar su espacio de conexiones con el espacio de 1-formas evaluadas en el álgebra de Lie de G y definidas en la base.

Transformaciones gauge

Definición 4.33. Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Una **transformación gauge** es un difeomorfismo G-equivariante $\Phi : P \to P$ tal que $\pi \circ \Phi = \pi$, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

y para todo $p \in P$, $g \in G$ se tiene que $\Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g$.

Es claro que, con la composición usual de aplicaciones, el conjunto de transformaciones gauge de P, al que denotaremos $G(P)$, tiene estructura de grupo.

Proposición 4.34. *Sea (P, A) un G fibrado principal con conexión A y sea $\Phi : P \to P$ una transformación gauge. Si H_A es la distribución horizontal asociada a la conexión A, entonces $H_A^\Phi = \Phi_* H_A$ es también una distribución horizontal asociada a una conexión en P.*

Demostración. Por un lado, ya que $\Phi_* : TP \to TP$ es un isomorfismo, preserva el subespacio vertical y por lo tanto, H_A^Φ es una distribución horizontal. Además,

$$R_{g*}((H_A^\Phi)_{\Phi(p)}) = R_{g*}\Phi_*(H_A)_p = \Phi_* R_{g*}(H_A)_p = \Phi_*(H_A)_{p\cdot g} = (H_A^\Phi)_{\Phi(pg)} = (H_A^\Phi)_{\Phi(p)\cdot g}.$$

es decir, H_A^Φ es una distribución horizontal G-invariante por la derecha. Por lo tanto, existe una conexión en P tal que H_A^Φ es su distribución horizontal asociada. $\square$

Corolario 4.35. *Sea (P, A) un G fibrado principal con conexión A y sea $\Phi : P \to P$ una transformación gauge. Si $\omega_A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ es la 1-forma de conexión asociada a la conexión A, entonces $\omega_A^\Phi = (\Phi^*)^{-1}\omega_A$ es la 1-forma de conexión asociada a la distribución H_A^Φ.*

Demostración. Supongamos que $v \in \mathrm{Ker}(\omega_A^\Phi)$, es decir, $\omega_A^\Phi(v) = 0$. Por como se ha definido ω_A^Φ se tiene que $(\Phi^*)^{-1}\omega_A(v) = 0$, por lo tanto $\omega_A \circ {\Phi_*}^{-1}(v) = 0$. Esto quiere decir que ${\Phi_*}^{-1}(v) \in \mathrm{Ker}(\omega_A) = H_A$, luego $v \in \Phi(H_A) = H_A^\Phi$. □

Acabamos de ver que dada una conexión en un fibrado principal P, bajo una transformación gauge obtenemos otra conexión en P, a la que llamaremos $\Phi(A)$ de forma que las distribuciones horizontales asociadas a cada conexión quedan relacionadas de tal manera que $H_{\Phi(A)} = \Phi_* H_A$. Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición.

Definición 4.36. Sean (P, A) y (P', A') dos G-fibrados principales con conexión. Una **transformación gauge** entre dos fibrados con conexión $\Psi : (P, A) \to (P', A')$ se define como un isomorfismo de G-fibrados principales $\Psi : P \to P'$ tal que $H_{A'} = \Psi_* H_A$.

Observación 4.37. Si $\xi = (P, \pi; M; G)$ y $\xi' = (P', \pi'; M; G)$ son dos G-fibrados principales triviales con conexiones A y A' respectivamente. Sea $\Psi : (P, A) \to (P', A')$ una transformación gauge. Sabemos que, por definición, las distribuciones horizontales asociadas a cada conexión se relacionan de forma que $H_{A'} = \Psi_* H_A$ y las 1-formas de conexión de forma que $\omega_{A'} = (\Psi^{-1})^*\omega_A$. Sean $s_0 : M \to P$ y $s_0' : M \to P'$ dos secciones (globales) de ξ y ξ' respectivamente, es claro que la aplicación $s = \Psi^{-1} \circ s_0' : M \to P$ define otra sección de P. Por lo tanto, debe existir una aplicación $g : M \to G$ tal que $s(x) = s_0(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in M$. Ahora, para el campo gauge asociado a $\omega_{A'}$ definido vía $(s_0')^*$ tenemos que

$$A_0' = (s_0')^*\omega_{A'} = (s_0')^*(\Phi^{-1})^*_A = s^*\omega_A = \omega_A \circ s_*.$$

De manera análoga que en la demostración del teorema (4.31), se tiene que

$$A_0' = \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ A_0 + g^*\theta.$$

donde $A_0 = s_0^*\omega_A$. En el caso particular en el que $G \subset \mathrm{GL}_n$ es un grupo de matrices, y por lo tanto, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ consiste a su vez en matrices, la expresión anterior se escribe como

$$A_0' = g^{-1}A_0 g + dg^{-1}g.$$

Curvatura

Dada una conexión A en un G-fibrado principal y sea H_A la distribución horizontal asociada a A. Denotaremos por

$$\pi_{H_A} : TP \to TP$$

a la proyección sobre la distribución horizontal. Es una colección de aplicaciones lineales

$$(\pi_{H_A})_p : T_pP \to T_pP$$

definida por $(\pi_{H_A})_p(v) = v$ si $v \in (H_A)_p$ y $(\pi_{H_A})_p(v) = 0$ si $v \in V_p$ para todo $p \in P$.

Definición 4.38. Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Sea A una conexión en ξ y sean $\omega_A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ la 1-forma de conexión asociada a A y H_A la distribución horizontal asociada a la conexión A. La **2-forma de curvatura**, o simplemente **curvatura**, es la 2-forma $F_A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ dada por

$$F_A(v, w) = d\omega_A(\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w))$$

para todo campo $v, w \in T_pP$, $p \in P$.

Lema 4.39. *Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal con conexión A. Entonces para un $g \in G$ cualquiera se tiene que*

$$(\pi_{H_A})_p \circ R_{g*} = R_{g*} \circ (\pi_{H_A})_p$$

en T_pP para todo $p \in P$.

Demostración. Teniendo en cuenta que tanto la distribución vertical como la distribución horizontal son G-invariantes por la derecha, es decir,

$$R_{g*}((H_A)_p) = (H_A)_{pg}$$
$$R_{g*}(V_p) = V_{pg}$$

para cualesqueira $g \in G$, $p \in P$. Sea $v_p \in T_pP$, podemos escribir $v_p = v_p^V + v_p^{H_A}$, donde v_p^V es vertical y $v_p^{H_A}$ horizontal. Por lo tanto, tenemos que

$$(\pi_{H_A})_p \circ R_{g*}(v_p) = (\pi_{H_A})_p(v_{pg}) = v_{pg}^{H_A}$$
$$R_{g*} \circ (\pi_{H_A})_p(v_p) = R_{g*}(v_p^{H_A}) = v_{pg}^{H_A}.$$

Y en consecuencia $(\pi_{H_A})_p \circ R_{g*} = R_{g*} \circ (\pi_{H_A})_p$. □

Proposición 4.40 (Propiedades de F_A)**.** *Sea $\xi = (P, \pi, M; G)$ un G-fibrado principal. Sea A una conexión en ξ y sea F_A la 2-forma de curvatura asociada a A.*

i) Para cualquier $g \in G$, $R_g^* F_A = Ad_{g^{-1}} \circ F_A$

ii) [**Ecuación de estructura**] *$F_A = d\omega_A + \frac{1}{2}\omega_A \wedge \omega_A$, donde $\wedge$ indica el producto wedge habitual en la parte de 1-formas y el corchete de Lie en la parte de $\mathfrak{g}$.*

iii) [**Identidad de Bianchi**] *$\pi_{H_A}^* dF_A = 0$.*

Demostración. i) Sean $v_p, w_p \in T_pP$,

$$\begin{aligned}
(R_g^* F_A)_p(v_p, w_p) &= (F_A \circ R_{g*})_p(v_p, w_p)\\
&= F_A(R_{g*}(v_p), R_{g*}(w_p))\\
&= d\omega_A((\pi_{H_A})_p \circ R_{g*}(v_p), (\pi_{H_A})_p \circ R_{g*}(w_p))\\
&= d\omega_A(R_{g*} \circ (\pi_{H_A})_p(v_p), R_{g*} \circ (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= (d\omega_A \circ (R_{g*}))((\pi_{H_A})_p(v_p), (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= (R_g^* d\omega_A)((\pi_{H_A})_p(v_p), (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= d(R_g^* \omega_A)((\pi_{H_A})_p(v_p), (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= d(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_A)((\pi_{H_A})_p(v_p), (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= (\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ d\omega_A)((\pi_{H_A})_p(v_p), (\pi_{H_A})_p(w_p))\\
&= (\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ F_A)(v_p, w_p)
\end{aligned}$$

de donde la cuarta igualdad se obtiene del lema anterior.

ii) Para probar que se cumple la ecuación de estructura debemos probar que

$$d\omega_A(\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)) = d\omega_A(v, w) + \omega_A(v) \wedge \omega_A(w)$$

para todo $v, w \in \mathfrak{X}(P)$. Consideraremos tres casos:

1. Sean $v, w \in H_A$, entonces $\omega_A(v) = \omega_A(w) = 0$ y $\pi_{H_A}(v) = v$ y $\pi_{H_A}(w) = w$. Por lo tanto, es inmediato ver que se verifica la ecuación de estructura.

2. Sean $v, w \in V$, sin perdida de generalidad podemos asumir que v, w son vectores fundamentales para ciertos $v', w' \in \mathfrak{g}$ respectivamente, es decir, $v = \widetilde{v'}$ y $w = \widetilde{w'}$. Ahora, por un lado, tenemos que

$$d\omega_A(\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)) = 0$$

pues $\pi_{H_A}(v) = \pi_{H_A}(w) = 0$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\omega_A(\widetilde{v'}) = v$ y $\omega_A(\widetilde{w'}) = w$,

$$\begin{aligned}
d\omega_A(v, w) + \omega_A(v) \wedge \omega_A(w) &= d\omega_A(\widetilde{v'}, \widetilde{w'}) + \omega_A(\widetilde{v'}) \wedge \omega_A(\widetilde{w'}) \\
&= \widetilde{v'}w - \widetilde{w'}v - \omega_A([\widetilde{v'}, \widetilde{w'}]) + [v, w] \\
&= -\omega_A([\widetilde{v'}, \widetilde{w'}]) + [v, w] \\
&= -\omega_A(\sigma[v, w]) + [v, w] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para este caso, se verifica también la ecuación de estructura.

3. Sean $v \in H_A$ e $w \in V$. Podemos asumir que $w = \widetilde{w'}$ para algún $w \in \mathfrak{g}$. Por un lado, como $\pi_{H_A}(w) = 0$, tenemos que

$$d\omega_A(\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)) = 0.$$

Por otro lado, como $\omega_A(w) = 0$,

$$\begin{aligned}
d\omega_A(v, w) + \omega_A(v) \wedge \omega_A(w) &= d\omega_A(\widetilde{v'}, w) \\
&= \widetilde{v'}\omega_A(w) - wv - \omega_A([\widetilde{v'}, w]) \\
&= -\omega_A([\widetilde{v'}, w]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

pues $[\widetilde{v'}, w] = 0$.

iii) Utilizando la ecuación de estructura, tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi_{H_A}^* dF_A &= \pi_{H_A}^* d(d\omega_A + \frac{1}{2}\omega_A \wedge \omega_A) \\
&= \pi_{H_A}^*(\frac{1}{2}d\omega_A \wedge \omega_A - \frac{1}{2}\omega_A \wedge d\omega_A) \\
&= \pi_{H_A}^*(d\omega_A \wedge \omega_A) \\
&= \pi_{H_A}^* d\omega_A \wedge \pi_{H_A}^* \omega_A \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.41. *Sea (P, A) un G fibrado principal con conexión A y sea $\Phi : P \to P$ una transformación gauge. Si h y h^Φ son las proyecciones horizontales de H_A y H_A^Φ respectivamente, entonces se tiene que $h^\Phi = \Phi_* h \Phi_*^{-1}$.*

Demostración. Sea $v^\Phi \in (H_A^\Phi)_p$, por definición de h^Φ tenemos que $h_p^\Phi(v^\Phi) = v^\Phi$ para cualquier punto $p \in P$. Además, sabemos también que $v^\Phi = (\Phi_*)_p(v)$ para un cierto $v \in (H_A)_p$. Por lo tanto, tenemos que $h^\Phi((\Phi_*)_p(v)) = (\Phi_*)_p(v)$. Por otro lado, tenemos que $v = (\Phi_*^{-1})_{\Phi(p)}(v^\Phi)$ y por la definición de h, $h((\Phi_*^{-1})_{\Phi(p)}(v^\Phi)) = (\Phi_*^{-1})_{\Phi(p)}(v^\Phi)$, de donde se sigue $(\Phi_*)_{\Phi(p)} h (\Phi_*^{-1})_p(v^\Phi) = v^\Phi = h^\Phi(v^\Phi)$. □

La siguiente proposición se sigue directamente de la ecuación de estructura.

Proposición 4.42. *Sea (P, A) un G fibrado principal con conexión A y sea $\Phi : P \to P$ una transformación gauge. Si $F_A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ es la 2-forma de curvatura asociada a A, entonces $F_A^\Phi = (\Phi^{-1})^* F_A$ es una 2-forma de curvatura.*

Al igual que con las 1-formas de curvatura, gracias a las secciones locales del fibrado podemos definir de manera local las siguientes 2-formas en abiertos de la base.

Definición 4.43. Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión A y sea $F_A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ una 2-forma de curvatura. El **campo de fuerza gauge** asociado a la sección local $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ es la 2-forma

$$F_{Ai} := s_i^* F_A \in \Omega^2(U_i; \mathfrak{g}).$$

La 2-forma F_{Ai} también recibe el nombre de **2-forma local de curvatura**.

Proposición 4.44. *Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión A y sea $F_A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ la 2-forma de curvatura. Sea $F_{Ai} := s_i^* F_A \in \Omega^2(U_i; \mathfrak{g})$ el campo gauge asociado a la sección local $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$. Entonces se tiene que*

$$F_{A_i} = dA_i + \frac{1}{2} A_i \wedge A_i.$$

Demostración. Por la proposción (4.40) sabemos que $F_A = d\omega_A + \frac{1}{2}\omega_A \wedge \omega_A$. Por lo tanto,

$$F_{Ai} = s_i^* F_A = s_i^* d\omega_A + \frac{1}{2} s_i^*(\omega_A \wedge \omega_A) = s_i^* F_A = ds_i^* \omega_A + \frac{1}{2} s_i^* \omega_A \wedge s_i^* \omega_A = dA_i + \frac{1}{2} A_i \wedge A_i.$$

□

Observación 4.45. Si $\xi = (P, \pi, M; G)$ es un G-fibrado principal trivial se puede definir la 2-forma $F_0 = s_0^* F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g})$ y por la proposición anterior se deduce que $F_0 = dA_0 + \frac{1}{2}[A_0, A_0]$.

4.3 Conexiones planas y distribuciones completamente integrables.

Definición 4.46. Una conexión A en un G-fibrado principal es una **conexión plana** si tiene curvatura idénticamente nula, es decir, si $F_A = 0$.

Definición 4.47. Un G-fibrado principal con conexión (P, A) es **plano** si A es una conexión plana.

Proposición 4.48. *Ser plano se preserva por transformaciones gauge.*

Demostración. Sea (E, A) un G-fibrado principal plano y sea $\Phi : (E, A) \to (E', A')$ una transformación gauge. Si $F_A \in \Omega^2(E; \mathfrak{g})$ y $F_{A'} \in \Omega^2(E'; \mathfrak{g})$ son las 2-formas de curvatura asociadas a las conexiones A y A'. Por la proposición (4.42) tenemos que

$$F_{A'} = (\Phi^{-1})^* F_A,$$

y como A es una conexión plana, $F_A = 0$, luego $F_{A'} = 0$ y por lo tanto, A' es una conexión plana y podemos decir que (E', A') es un G-fibrado principal plano. □

Proposición 4.49. *Una conexión A en un G-fibrado principal es una conexión plana si y solo si la distribución horizontal H_A, asociada a A, es completamente integrable.*

Demostración. Sea (P, A) un G-fibrado principal con conexión, se tiene que

$$\begin{aligned} F_A(v, w) &= d\omega_A(\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)) \\ &= (\pi_{H_A}(v))\omega(\pi_{H_A}(w)) - (\pi_{H_A}(w))\omega(\pi_{H_A}(v)) - \omega([\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)]) \\ &= -\omega([\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)]) \end{aligned}$$

para todo $p \in P$, $v, w \in T_p P$. Por lo tanto, se tiene que

$$F_A(v, w) = 0 \text{ si y solo si } -\omega([\pi_{H_A}(v), \pi_{H_A}(w)]) = 0.$$

Es decir, la conexión A es plana si y solo si la distribución H_A es involutiva. Por lo tanto, por el teorema de Frobenius se tiene el resultado. □

Ejemplo 4.50. Para un G-fibrado principal trivial $\xi = (E, \pi, M; G)$ con conexión plana A, hallar una variedad integral Y para la distribución horizontal H_A consiste en encontrar una sección $s_1 : M \to E$ tal que $Y = s_1(M)$, lo que implica que

$$T_{s_1(x)}Y = (H_A)_{s_1(x)}$$

para todo $x \in M$. Ahora bien, tenemos que

$$T_{s_1(x)}Y = \{(s_{1*})_x(v) : v \in T_xM\},$$

luego $(s_{1*})_x(v) \in (H_A)_{s_1(x)}$ para todo $x \in M$, $v \in T_xX$. Por lo tanto, por como se define la 1-forma de conexión ω_A, tenemos que

$$(\omega_A)_{s_1(x)}(s_{1*}(v)) = 0.$$

Pero teniendo en cuenta que

$$(\omega_A)_{s_1(x)}(s_{1*}(v)) = (s_1^*{}_A)(v) = (A_1)_x(v),$$

vemos que la condición $T_{s_1(x)}Y = (H_A)_{s_1(x)}$ para todo $x \in M$ es equivalente a la condición

$$(A_1)_x(v) = 0$$

para todo $x \in M$, $v \in T_xM$.

Por otro lado, sea s_0 una sección global de ξ, sabemos que existe una función $g_1 : M \to G$ tal que $s_0(x) = s_1(x) \cdot g_1(x)$ y que los campos gauge A_0 y A_1 asociados a cada sección, están relacionados de forma que

$$A_1 = \mathrm{ad}_{g_1^{-1}} \circ A_0 + g_1^*\theta.$$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver para $g_1 : M \to G$ la ecuación

$$\mathrm{ad}_{g_1^{-1}} \circ A_0 + g_1^*\theta = 0.$$

En el caso particular en el que $G \subset \mathrm{GL}_n$ podemos escribir la ecuación anterior como

$$g_1^{-1} A_0 g_1 + d(g_1^{-1}) g_1 = 0.$$

Denotando $f = g_1^{-1}$, obtenemos la ecuación

$$f A_0 = -df.$$

Este es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que, si $x^1, \dots, x^n$ son coordenadas en M y $A_0 = \sum_{i=1}^n A_0^i dx^i$, podemos expresar en componentes como

$$f A_{0,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

La "forma clásica"del teorema de Frobenius garantiza la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = F_i(x, f(x))$$

si se satisface la siguiente condición de integrabilidad:

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i + \sum_k \partial_{y^k} F_j F_i^k - \sum_k \partial_{y^k} F_i F_j^k = 0.$$

En nuestro caso, tenemos que

$$F_i(x, y) = -y A_{0,i}(x),$$

de tal forma que la condición de integrabilidad se expresa como

$$\partial_i A_{0,j} - \partial_j A_{0,i} + \sum_k A_{0,j}^k A_{0,i}^k - \sum_k A_{0,i}^k A_{0,j}^k = 0.$$

Es fácil comprobar que ésta es la expresión en coordenadas de la fórmula

$$dA_0 + A_0 \wedge A_0 = 0,$$

que indica que la conexión A es plana.

5 Correspondencia entre fibrados planos y representaciones del grupo fundamental

Sea $\xi = (P, \pi, X; G)$ un G-fibrado principal sobre una variedad diferenciable (conexa) X y sea A una conexión plana en ξ. Por la proposición (4.49) se tiene que la distribución horizontal H_A asociada a A es completamente integrable. Por lo tanto, fijando un punto base $p_0 \in P$ podemos considerar la subvariedad integral maximal corresponidente $Y_A \subset P$ que pasa por p_0 y que, por definición, es la mayor subvariedad de P con $p_0 \in Y_A$ y tal que $T_y Y_A = (H_A)_y$ para cualquier punto $y \in Y_A$.

Lema 5.1. *La aplicación $p = \pi|_{Y_A} : Y_A \to X$ es un Γ_A-recubridor con $\Gamma_A = \{g \in G : p_0 \cdot g \in Y_A\}$.*

Demostración. Ya que X es una variedad diferenciable conexa, para cualquier punto $x \in X$ podemos definir un camino $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x$. Sea $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to Y_A$ una elevación del camino γ y sea $\widetilde{\gamma}(1) = y$. Entonces para todo $g \in G$ el camino $\widetilde{\gamma}^g$ definido como $\widetilde{\gamma}^g(t) = \widetilde{\gamma}(t) \cdot g$ para $t \in [0,1]$ está contenido en una variedad integral que contiene a $p_0 \cdot g$, y por lo tanto a Y_A. En particuar, $y \cdot g \in Y_A$. En efecto, $\widetilde{\gamma}^g(t) \in Y_A$ para cada $t \in [0,1]$, ya que

$$T_{\widetilde{\gamma}^g(t)} Y_A = R_{g*}(T_{\widetilde{\gamma}(t)} Y_A) = R_{g*}((H_A)_{\widetilde{\gamma}(t)}) = (H_A)_{\widetilde{\gamma}(t) \cdot g}.$$

Por lo tanto, la acción de G en P induce una acción de Γ_A en Y_A. Además, $Y_A/\Gamma_A = X$.

Ahora, para ver que la acción es propiamente discontinua, teniendo en cuenta la definición de conexión como una escisión de una sucesión exacta corta, tenemos que la distribución horizontal es la imagen $H_A = A(p_*(TX))$, de modo que tenemos $TP = V \oplus H_A$. Por lo tanto, para todo $y \in Y_A$ se tiene

$$T_y Y_A = (H_A)_y \cong (p_* TX)_y \cong T_{p(y)} X.$$

De modo que $p : Y_A \to X$ es un difeomorfismo local. En consecuencia, tomando un entorno suficientemente pequeño U de x, tenemos que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de copias de U de la forma $V \cdot g$ para $g \in \Gamma_A$, y por lo tanto, la acción es propiamente discontinua y por el teorema (3.18) se tiene que $p : Y_A \to X$ es un Γ_A-recubridor. □

Ahora, sea $p_0 \in Y_A$ con $p(p_0) = x_0$ un punto base del recubridor $p : Y_A \to X$, si consideramos el homomorfismo de monodromía $\rho_{p_0} : \pi_1(X, x_0) \to \Gamma_A$, componiendo con la inclusión $i : \Gamma_A \hookrightarrow G$ obtenemos un homomorfismo $\mathrm{hol}(A) : \pi_1(X, x_0) \to G$ que denominamos ***homomorfismo de holonomía de la conexión*** A. En consecuencia, hemos definido una aplicación

$$\{G\text{-fibrados principales planos sobre } X \text{ con punto base}\} \xrightarrow{\mathrm{hol}} \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G).$$

Y en consecuencia, como los homomorfismos de monodromía para distintos puntos base dentro de la misma fibra son conjugados, por como hemos definido el homomorfismo de holonomía de A, obtenemos una aplicación bien definida

$$\{G\text{-fibrados principales planos sobre } X\} \xrightarrow{\mathrm{hol}} \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)/G = \mathcal{R}_G(X).$$

Lema 5.2. *Si existe una transformación gauge $\Phi : (E_1, A_1) \to (E_2, A_2)$ entre dos fibrados planos, entonces los espacios recubridores $\pi_1 : Y_{A_1} \to X$ y $\pi_2 : Y_{A_2} \to X$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\Phi : (E_1, A_1) \to (E_2, A_2)$ una transformación gauge entre dos fibrados planos, si denotamos por Y_{A_1} e Y_{A_2} a las subvariedades integrales maximales correspondientes a H_{A_1} y H_{A_2}, tenemos que $H_{A_1} = TY_{A_1}$ $H_{A_2} = TY_{A_2}$. Por otro lado, por definición,

$$H_{A_2} = \Phi_* H_{A_1} = \Phi_*(TY_{A_1}) = T\Phi(Y_{A_1}).$$

Luego podemos identificar Y_{A_2} con $\Phi(Y_{A_1})$. □

Gracias a este lema, podemos definir una aplicación

$$\{G\text{-fibrados principales planos sobre } X\} / \{\text{transformaciones gauge}\} \xrightarrow{\text{hol}} \mathcal{R}_G(X).$$

Denotaremos por $\mathcal{M}_G(X)$ al conjunto cociente

$$\{G\text{-fibrados principales planos sobre } X\} / \{\text{transformaciones gauge}\}$$

que se denomina ***espacio de móduli de los G-fibrados principales planos sobre X***.

Lema 5.3. *La aplicación* $\text{hol} : \mathcal{M}_G(X) \to \mathcal{R}_G(X)$ *es biyectiva.*

Demostración. Por un lado, a cada homomorfismo $\rho : \pi_1(X, x) \to G$ le vamos a asociar un fibrado plano (P_ρ, A_ρ) de forma que $\text{hol}(P_\rho, A_\rho) = \text{hol}(A_\rho) = \rho$. Considerando el recubridor universal $\widetilde{X} \to X$ y el G-recubridor principal trivial sobre X equipado con la conexión trivial A_0, $(\widetilde{X} \times G, A_0)$. La conexión A_0 es plana, por lo tanto tenemos que

$$(H_A)_{(y,g)} = T_y\widetilde{X} \times G.$$

Ahora, si hacemos actuar a $\pi_1(X, x)$ sobre $\widetilde{X} \times G$ por la izquierda de manera que:

$$[\sigma] \cdot (z, g) = ([\sigma] \cdot z, \rho([\sigma])g)$$

donde $[\sigma] \cdot z$ es la acción definida en el apartado (3.2) y $\rho([\sigma])g$ es la operación del grupo G, podemos tomar el cociente

$$P_\rho = (\widetilde{X} \times G)/\pi_1(X, x).$$

Si $\varpi_\rho : \widetilde{X} \times G \to P_\rho$ denota la proyeccion natural al cociente, podemos considerar la conexión inducida A_ρ como

$$H_{A_\rho} = \varpi_{\rho *}(H_{A_0}).$$

Esta es una distribución integrable cuya variedad integral maximal en un punto $p_0 \in P_\rho$ es el espacio recubridor $Y_\rho = (\widetilde{X} \times \text{Im}(\rho))/\pi_1(X)$ con homomorfismo de monodromía igual a ρ. En efecto, si p_0 es la órbita de un punto $(y, 1_G) \in \widetilde{X} \times G$, entonces

$$p_0 = \{([\sigma] \cdot y, \rho([\gamma])) : [\sigma] \in \pi_1(X, x)\},$$

que está en biyección con $\text{Im}(\rho)$. Por otra parte, la variedad integral maximal de H_{A_0} correspondiente a un punto $(y, g) \in \tilde{X} \times G$ es la subvariedad $\tilde{X} \times \{g\}$. Tenemos entonces que la correspondiente variedad integral maximal asociada a H_{A_ρ} ha de venir dada por el cociente de la variedad $\tilde{X} \times \text{Im}(\rho)$ por la misma acción del grupo fundamental. En conclusión, tenemos $\text{hol}(A_\rho) = \rho$.

Por otro lado, vamos a ver ahora que para cada G-fibrado principal plano (P, A) existe una transformación gauge relacionando $(P_{\text{hol}(A)}, (A_{\text{hol}(A)}))$ con (P, A). Procedemos de forma análoga a la demostración de la equivalencia entre G-recubridores y representaciones del grupo fundamental. Comenzamos fijando un punto $x_0 \in X$ e identificando $\tilde{X}$ como el conjunto de las clases de homotopía $[\gamma]$ de caminos en X con $\gamma(0) = x_0$. Ahora, si (P, A) es un fibrado plano y fijamos un punto base p_0 sobre x_0, podemos considerar la correspondiente variedad integral maximal Y_A y la aplicación recubridora $p : Y_A \to X$. Como p es una aplicación recubridora, todo camino γ en X puede levantarse a un único camino $\tilde{\gamma}_{p_0}$ en Y_A con $\tilde{\gamma}_{p_0}(0) = p_0$. Definimos ahora la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} F : \tilde{X} \times G &\longrightarrow P \\ ([\gamma], g) &\longmapsto \tilde{\gamma}_{p_0}(1) \cdot g. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $\rho = (A) : \pi_1(X, x) \to G$ el homomorfismo de holonomía del fibrado plano (P, A). Para todo $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$, como ρ es también igual a la monodromía de Y_A, se tiene

$$F([\sigma] \cdot [\gamma], \rho([\gamma])g) = F([\gamma], g).$$

Por tanto, la aplicación F factoriza por el cociente $E_\rho = (\tilde{X} \times G)/\pi_1(X,x)$ dado por la acción $[\sigma] \cdot ([\gamma], g) = ([\sigma] \cdot [\gamma], \rho([\sigma])g)$, obteniendo así una aplicación diferenciable $\varphi : E_\rho \to P$ que conmuta con las proyecciones a X. Esta aplicación es claramente un difeomorfismo. Además, φ identifica Y_{A_ρ} con Y_A, ya que $\tilde{\gamma}_{p_0}(1) \cdot g$ permanece en Y_A si y sólo si $g \in \mathrm{Im}(\rho)$. Concluimos entonces que φ determina una transformación gauge entre (P_ρ, A_ρ) y (P, A). □

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 5.4. *La holonomía*

$$\mathrm{hol} : \mathcal{M}_G(X) \to \mathcal{R}_G(X)$$

que asocia a cada G-fibrado principal plano (P,A) en X el homomorfismo $\mathrm{hol}(A) : \pi_1(X,x_0) \to G$ *dado por la monodromía de una variedad integral maximal $Y_A \to X$, define una biyección entre el espacio de móduli de fibrados planos $\mathcal{M}_G(X)$ y la variedad de caracteres $\mathcal{R}_G(X)$.*

Ejemplo 5.5. Consideremos $G = (\mathbb{R}, +)$ el grupo aditivo de los números reales y $E = X \times \mathbb{R} \to X$ el $\mathbb{R}$-fibrado trivial en X. Una conexión en E está dada por una escisión de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow V = X \times \mathbb{R} \longrightarrow TE = TX \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1\,*}} \mathrm{pr}_{1*} TX \longrightarrow 0.$$

Una tal escisión viene dada por un morfismo de fibrados $TX \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ sobre $X \times \mathbb{R}$, equivalentemente, esto es una sección del fibrado cotangente T^*X (tensorizado por $\mathbb{R}$, aunque no hace nada) o, lo que es lo mismo, una 1-forma $A \in \Omega^1(X)$.

La curvatura de la conexión definida por A es la 2-forma $F_A = dA \in \Omega^2(X)$. Por tanto, A define una conexión plana si y sólo si $dA = 0$. Por otra parte, una transformación gauge de (E, A) viene dada por una función $f : X \to \mathbb{R}$ que cambia A por $A + df$. Por tanto, A y A' son gauge-equivalentes si y sólo si pertenecen a la misma clase de cohomología de de Rham. Tenemos entonces que en este caso

$$\mathcal{M}_G(X) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X).$$

El teorema nos dice entonces que

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X) = \mathcal{M}_G(X) = \mathcal{R}_G(X) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbb{R}) \cong H^1(X, \mathbb{R}).$$

Obtenemos el teorema de de Rham para grado 1.

Ejemplo 5.6 (Teoría Gauge en una superficie compacta orientable)**.** En física moderna, el electromagnetismo se entiende como la teoría gauge U(1). Así, el espacio de móduli de $U(1)$-fibrados planos en una variedad X, $\mathcal{M}_{U(1)}(X)$, se identifica con el ***espacio de móduli de soluciones a las ecuaciones de Maxwell***. El teorema nos permite identificar este espacio con la variedad de caracteres de X,

$$\mathcal{R}_{U(1)}(X) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), U(1)).$$

Esta variedad es especialmente simple en este caso en el que X es una superficie compacta y $G = U(1)$ es un grupo abeliano. En efecto, si X es una (la) superficie compacta de género g, se tiene una presentación finitamente generada de $\pi_1(X)$ como

$$\pi_1(X) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g | [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Aquí, $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ denota el conmutador de dos elementos. Como $U(1)$ es abeliano, las relaciones se trivializan y obtenemos que la variedad de caracteres en este caso es simplemente un toro de dimensión g,

$$\mathcal{R}_{U(1)}(X) = U(1)^g = T^g.$$

Cuando X se equipa de la estructura de una superficie de Riemann, la ***teoría de Hodge*** identifica este toro con la ***variedad jacobiana*** de la superficie de Riemann X, que clasifica los fibrados de línea holomorfos de grado 0 en X.

Más generalmente, la variedad de caracteres de X para un grupo de Lie G se identifica como

$$\mathcal{R}_G(X) = \{A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g \in G : [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g] = 1\} /G.$$

Cuando $G = U(n)$, el espacio de móduli de fibrados planos $\mathcal{M}_{U(n)}(X)$ se identifica con el ***espacio de móduli de soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills***. Este espacio es de gran interés en física. Además, Narasimhan y Seshadri demostraron en 1965 que (fijada una estructura de superficie de Riemann en X) este espacio puede identificarse con el espacio de móduli de los ***fibrados holomorfos***. Para grupos G más generales los resultados de Narasimhan y Seshadri fueron extendidos a finales de los años 80 por Donaldson, Corlette, Hitchin, Simpson, y otros, para relacionar el espacio $\mathcal{M}_G(X)$ con el espacio de móduli de los ***fibrados de Higgs***. Este conjunto de resultados se conoce a día de hoy como la ***teoría de Hodge no abeliana***.

Una introducción elemental a estos temas puede leerse en el apéndice de García-Prada al libro de Wells [11].

Referencias

[1] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505):523–615, 1983.

[2] José Figueroa O'Farrill. Gauge theory, 2006. Lecture notes available at: https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/GT/.

[3] William Fulton. *Algebraic topology*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course.

[4] Mark J. D. Hamilton. *Mathematical gauge theory*. Universitext. Springer, Cham, 2017. With applications to the standard model of particle physics.

[5] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[6] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.

[7] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[8] Shigeyuki Morita. *Geometry of characteristic classes*, volume 199 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1999 Japanese original, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[9] Shigeyuki Morita. *Geometry of differential forms*, volume 201 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the two-volume Japanese original (1997, 1998) by Teruko Nagase and Katsumi Nomizu, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[10] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[11] Raymond O. Wells, Jr. *Differential analysis on complex manifolds*, volume 65 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada.